جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

ميكانيك تحليلي
رابعة رياضيات – ميكانيك
شباط 2016

الاسم:
الرقم:

السؤال الأول : 5 × 7 = 35

ليكن E , F فضائين متجهين، يملكان القاعدتين $f=\{\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3\}$, $e=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4\}$ ولتكن أيضاً $f^*=\{\vec{f}_1^*,\vec{f}_2^*,\vec{f}_3^*\}$ و $e^*=\{\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*,\vec{e}_4^*\}$ القاعدتين الثنويتين في الفضائين E^*,F^*.

لنضع : $\alpha=\vec{f}_1+2\vec{f}_2+3\vec{f}_3$ ، $\beta=\vec{f}_1^*-\vec{f}_3^*$ المطلوب :

1. اعط قاعدة للفضاء $F\vee F$ ،
2. اعط قاعدة للفضاء $E\otimes F$ ،
3. كم عدد أبعاد الفضاء $E\wedge E$ ،
4. احسب الجداء التقليصي β,α ،
5. احسب $\beta\otimes\beta$ ،
6. حدد الفضاء $F\wedge F$ ،
7. هل العبارة $\alpha.\beta$ معرفة.

السؤال الثاني : 10 × 3 = 30

في جملة إحداثية عطالية متعامدة ونظامية $Oxyz$، تتحرك نقطة مادية $P(x,y,z)$، كتلتها واحدية، تحت تأثير القوة $\vec{F}=y\,\vec{i}+x\,\vec{j}$، وتخضع للقيدين المثاليين: $x=\cos z$, $y=\sin z$. المطلوب :

1. حدد عدد درجات الحرية، ثمّ أوجد معادلات الحركة باستخدام المعادلة الأساسية في التحريك (بدون ردود أفعال).
2. اعط تابع كمون V، وتابع الطاقة الحركية T، ثم تابع لاغرانج L، بدلالة المتحول z، ومشتقاته بالنسبة للزمن.
3. لنرمز لمرافق المتحول z بالرمز y ، أوجد تحويل لوجاندر، واكتب تابع هملتون.

السؤال الثالث : 5 × 7 = 35

أجب بصح أو بخطأ (فقط) عما يلي :

1. القيد المثالي هو القيد الذي لا ينتج عنه أي رد فعل،
2. في جملة مادية مقيدة، عدد درجات الحرية هو عدد إحداثيات نقاط الجملة،
3. عدد درجات الحرية لجسم صلب نقطه متناهية هو خمسة،
4. تابع هملتون يساوي عددياً تابع لاغرانج،
5. إذا كانت الدالتين F , G تكاملين أوليين، وكان α,β عددين حقيقيين، كانت الدالة $\alpha F+\beta G$ تكاملاً أولياً،
6. دالة هملتون تتضمن مشتقات بالنسبة للزمن،
7. دالة لاغرانج هي دالة معرفة على الفضاء الطوري.

كلية العلوم
قسم الرياضيات

رابعة رياضيات - ميكانيك
شباط 2014

الاسم :
الرقم :

السؤال الأول $35 = 7 \times 5$

ليكن E ، F فضاءين متجهيين، يمثلان القاعدتين $f=\{\vec f_1,\vec f_2,\vec f_3\}$ ، $e=\{\vec e_1,\vec e_2,\vec e_3\}$ ، ولتكن أيضاً $f^*=\{\vec f_1^*,\vec f_2^*,\vec f_3^*\}$ ، و $e^*=\{\vec e_1^*,\vec e_2^*,\vec e_3^*\}$ القاعدتين الثنويتين في الفضاءين E^*, F^*.

نضع $\alpha=\vec e_1+\vec e_2+\vec e_3$ ، و $\beta=2\vec f_1-\vec f_2+3\vec f_3$ المطلوب :

1. اعط قاعدة للفضاء $E^*\wedge E^*$ ،
2. اعط قاعدة للفضاء $F\otimes E^*$ ،
3. كم عدد أبعاد الفضاء $E\vee E$ ،
4. احسب الجداء التقلصي $\alpha.(\vec e_1^*+\vec e_2^*)$ ،
5. احسب الجداء التقلصي $\beta.\vec f_2^*$ ،
6. هل يمكن انشاء تشاكل بين الفضاء المتجهي $E\vee E$ والفضاء المتجهي E ،
7. إلى أي فضاء ينتمي المقدار $\alpha\otimes\beta$.

السؤال الثاني : $30 = 10 \times 3$

في الجملة الإحداثية الديكارتية $Oxyz$ ، تتحرك نقطة مادية $P(x,y,z)$ ، كتلتها واحدية، تحت تأثير القوة $\vec F=\vec R=x\vec i+y\vec j$ ، وتخضع للقيد المثالي: $x^2+y^2=z^2,\ z>0$. المطلوب :

1. طبق طريقة مضاريب لاغرانج، وحدد المعادلات اللازمة لحل المسألة،
2. اعط تابع الكمون V ، وتابع الطاقة الحركية T ، ثم تابع لاغرانج L ، بدلالة المتحول z ، والمتحول φ (زاوية المتجه $\vec R$ مع المحور ox) ومشتقاتهما،
3. نرمز لمرافقي المتحولين z,φ بالرمزين τ,σ ، على الترتيب. أوجد تحويل لوجندر، واعط تابع هملتون H.

السؤال الثالث : $35 = 7 \times 5$

أجب بصح أو بخطأ (**فقط**) عما يلي :

1. أي مجموعة منتهية من النقاط المادية، تخضع فقط لعدد منتهٍ من القيود المستقلة،
2. إذا كان F تكاملاً أولياً، فإن F^2 تكاملاً أولياً بالضرورة،
3. تابع هملتون هو تكامل أولي،
4. مبدأ مثالية القيود يكفي وحده لحل كل مسائل الميكانيك،
5. عدد معادلات هملتون، هو نفس عدد معادلات لاغرانج،
6. ردود الأفعال لا تعمل أبداً،
7. عدد درجات الحرية لنقطتين ماديتين هو أربع.

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

ميكانيك تحليلي
رابعة رياضيات - ميكانيك
كانون ٢٠١٥

الاسم :
الرقم :

السؤال الأول : $5 \times 7 = 35$

ليكن E , F فضائيين متجهيين، بملكان القاعدتين $f = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \bar{f}_4\}$, $e = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ ، ولتكن أيضاً $f^* = \{\bar{f}_1^*, \bar{f}_2^*, \bar{f}_3^*, \bar{f}_4^*\}$ ، و $e^* = \{\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*\}$ القاعدتين الثنويتين، في الفضائيين E^*, F^* .

لنضع : $\alpha = 7\bar{e}_1 - 5\bar{e}_2$ ، $\beta = 2\bar{e}_1^* + 3\bar{e}_2^*$ المطلوب :

١. اعط قاعدة للفضاء $F \wedge F \wedge F$ ،
٢. اعط قاعدة للفضاء $F^* \otimes E$ ،
٣. كم عدد أبعاد الفضاء $F \vee F$ ،
٤. احسب الجداء التقليصي $\alpha \cdot \beta$ ،
٥. احسب $\alpha \otimes \alpha$ ،
٦. حدد الفضاء $F \wedge F \wedge F \wedge F \wedge F$ ،
٧. هل العبارة $\beta . \beta$ معرفة.

السؤال الثاني : $10 \times 3 = 30$

في جملة إحداثية عطالية متعامدة ونظامية $Oxyz$ ، تتحرك نقطة مادية $P(x, y, z)$ ، كتلتها واحدية، تحت تأثير القوة $\bar{F} = x\,\bar{i} + 2y\,\bar{j} + 3z\,\bar{k}$ ، وتخضع للقيدين المثاليين: $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$ ، $x = 0$. المطلوب :

١. حدد عدد درجات الحرية، ثم أوجد معادلات الحركة باستخدام طريقة مضاريب لاغرانج.
٢. اعط تابع كمون V، وتابع الطاقة الحركية T، ثم تابع لاغرانج L، بدلالة المتحول المعمم φ، ومشتقاته بالنسبة للزمن، حيث $2y = \cos\varphi, \; 3z = \sin\varphi$
٣. لنرمز لمرافق المتحول φ بالرمز p ، أوجد تحويل لجندر، واكتب تابع هملتون.

السؤال الثالث : $5 \times 7 = 35$

أجب بصح أو بخطأ (**فقط**) عما يلي :

١. القيد المثالي قد يقدم رد فعل،
٢. التكامل الأولي هو دالة ثابتة على الفضاء الطوري،
٣. تابع هملتون يساوي تابع لاغرانج،
٤. الجسم الصلب هو مجموعة من النقط المادية الطليقة،
٥. تملك النقطة المادية الطلقة ستة درجات حرية،
٦. المعادلة الأساسية في التحريك خالية من ردود الأفعال،
٧. إذا كانت F تكاملاً أولياً، وكانت $F + G$ تكاملاً أولياً، تكون G تكاملاً أولياً.

د.خالد العبدالله

مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق



جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

ميكانيك تحليلي
رابعة رياضيات - ميكانيك
حزيران 2015

الاسم :
الرقم :

السؤال الأول : $5 \times 7 = 35$

ليكن $E\ ,\ F$ فضائين متجهيين، يملكان القاعدتين $e = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5\}$ ، $f = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ ، ولتكن أيضاً $f^* = \{\bar{f}_1^*, \bar{f}_2^*, \bar{f}_3^*\}$ و $e^* = \{\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*, \bar{e}_3^*, \bar{e}_4^*, \bar{e}_5^*\}$ القاعدتين الثنويتين، في الفضائين E^*, F^*.

لنضع : $\alpha = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_3$ ، $\beta = \bar{e}_1^* + 2\bar{e}_3^*$ المطلوب :

1. اعط قاعدة للفضاء $F \vee F$ ،
2. اعط قاعدة للفضاء $E \wedge E$ ،
3. كم عدد أبعاد الفضاء $E \vee E$ ،
4. احسب الجداء التقليصي $\alpha \cdot \beta$ ،
5. احسب $\alpha \otimes \beta$ ،
6. إلى أي فضاء ينتمي المقدار $\bar{e}_3 \cdot \beta$ ،
7. هل العبارة $\alpha \wedge \beta$ معرفة؟ علل إجابتك.

السؤال الثاني : $10 \times 3 = 30$

في جملة إحداثية عطالية متعامدة ونظامية $Oxyz$ ، تتحرك نقطتان ماديتان $P(x, y, z)$, $Q(x_1, y_1, z_1)$ ، كتلتاهما واحديتان، تحت تأثير حقل الجاذبية الثابت $\bar{F} = -g\,\bar{k}$ ، وتخضعان لقيود مثالية تجعلهما يتحركان على المحور Oz ، ويبقى دوماً $z_1 - z = 1$.

المطلوب :

1. حدد عدد درجات الحرية، ثمّ أوجد معادلات الحركة باستخدام المعادلة الأساسية في التحريك.
2. اعط تابع كمون V، وتابع الطاقة الحركية T، ثمّ تابع لاغرانج L، بدلالة المتحول المعمم z، ومشتقاته بالنسبة للزمن.
3. لنرمز لمرافق المتحول z بالرمز p ، أوجد تحويل لوجندر، واكتب تابع هملتون.

السؤال الثالث : $5 \times 7 = 35$

أجب بصح أو بخطأ **(فقط)** عما يلي :

1. في جملة مادية مقيدة، عدد ردود الأفعال يساوي عدد القيود،
2. القيد المثالي هو القيد الذي يطبق على نقطة مادية واحدة،
3. تابع هملتون هو تابع لاغرانج مطبق عليه تحويل لوجندر،
4. عدد مضاريب لاغرانج هو عدد القيود المستقلة،
5. عدد درجات الحرية لجسم صلب نقاطه متسامتة (على استقامة واحدة) هو خمسة،
6. تابع هملتون هو تابع حقيقي معرّف على الفضاء الطوري،
7. عدد أبعاد الفضاء الطوري لجملة مادية هو عدد النقاط التي تكونها.

د. خالد العبدالله — مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق

كلية العلوم
قسم الرياضيات

رابعة رياضيات - ميكانيك
شباط 2014

الاسم :
الرقم :

السؤال الأول : 5 × 7 = 35

ليكن E, F فضائين متجهيين، يملكان القاعدتين $e=\{\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}\}, f=\{\overline{f_1},\overline{f_2},\overline{f_3}\}$، ولتكن أيضاً $f^*=\{\overline{f_1}^*,\overline{f_2}^*,\overline{f_3}^*\}$ و $e^*=\{\overline{e_1}^*,\overline{e_2}^*,\overline{e_3}^*\}$ القاعدتين الثنويتين، في الفضائين E^*, F^*.

لنضع : $\alpha=\overline{e}_1+\overline{e}_2+\overline{e}_3$، و $\beta=2\overline{f}_1-\overline{f}_2+3\overline{f}_3$. المطلوب :

1. اعط قاعدة للفضاء $E^*\wedge E^*$،
2. اعط قاعدة للفضاء $F\otimes E^*$،
3. كم عدد أبعاد الفضاء $E\vee E$،
4. احسب الجداء التقلصي $\alpha.(\overline{e_1}^*+\overline{e_2}^*)$،
5. احسب الجداء التقلصي $\beta.\overline{f_2}^*$،
6. هل يمكن انشاء تشاكل بين الفضاء المتجهي $E\vee E$ والفضاء المتجهي E،
7. إلى أي فضاء ينتمي المقدار $\alpha\otimes\beta$.

السؤال الثاني : 3 × 10 = 30

في الجملة الإحداثية العطالية $Oxyz$، تتحرك نقطة مادية $P(x,y,z)$، كتلتها واحدية، تحت تأثير القوة $\vec F=\vec R=x\,\vec i+y\,\vec j$، وتخضع للقيد المثالي: $x^2+y^2=z^2,\ z>0$. المطلوب :

1. طبق طريقة مضاريب لاغرانج، وحدد المعادلات اللازمة لحل المسألة،
2. اعط تابع الكمون V، وتابع الطاقة الحركية T، ثمّ تابع لاغرانج L، بدلالة المتحول z والمتحول φ (زاوية المتجه $\vec R$ مع المحور ox) ومشتقاتهما،
3. لنرمز لمرافقي المتحولين φ, z بالرمزين σ, τ، على الترتيب. اوجد تحويل لوجندر، واعط تابع هملتون H.

السؤال الثالث : 5 × 7 = 35

اجب بصح أو بخطأ (فقط) عما يلي :

1. اي مجموعة منتهية من النقاط المادية، تخضع فقط لعدد منتهٍ من القيود المستقلة،
2. إذا كان F تكاملاً أولياً، فإن F^2 تكاملاً أولياً، بالضرورة،
3. تابع هملتون هو تكامل أولي،
4. مبدأ مثالية القيود يكفي وحده لحل كل مسائل الميكانيك،
5. عدد معادلات هملتون، هو نفس عدد معادلات لاغرانج،
6. ردود الأفعال لا تعمل أبداً،
7. عدد درجات الحرية لنقطتين ماديتين هو أربع.

سلم تصحيح - ميكانيك تحليلي - شباط ٢٠١٤

السؤال الأول: (35)

1. $\{\vec{e}_1^*\wedge\vec{e}_2^*, \vec{e}_2^*\wedge\vec{e}_3^*, \vec{e}_3^*\wedge\vec{e}_1^*\}$ 5

2. $\{\vec{f}_i\otimes\vec{e}_j^* ; i,j=1,2,3\}$ 5

3. العدد هو 6 5

4. $\alpha\cdot(\vec{e}_1^*+\vec{e}_2^*)=1+1=2$ 5

5. $\vec{f}_1^*\cdot A = 2\times 1 = 2$ 5

6. لا

7. إلى الفضاء $E\otimes F$ 5

السؤال الثاني: (30)

1. المعادلة الأساسية:

$$(\ddot{x}-x)\delta x+(\ddot{y}-y)\delta y+\ddot{z}\,\delta z=0$$

من القيد نجد

$$x\,\delta x+y\,\delta y-z\,\delta z=0$$

ومنه

$$[\ddot{x}+(\lambda-1)x]\delta x+[\ddot{y}+(\lambda-1)y]\delta y+(\ddot{z}-\lambda z)\delta z=0$$

ومنه:

$$\ddot{x}+(\lambda-1)x=0\ (1)\quad \ddot{y}+(\lambda-1)y=0\ (2)\quad \ddot{z}-\lambda z=0\ (3)$$

المعادلات المطلوبة هي (1) ، (2) ، (3) بالإضافة لمعادلة القيد 10

2. تابع الكمون

$$\delta V=-\vec{F}\,\delta\vec{r}=\delta(-\tfrac{1}{2}z^2)\Rightarrow V=-\tfrac{1}{2}z^2$$

تابع الطاقة الحركية

$$T=\tfrac{1}{2}(2\dot{z}^2+z^2\dot{\varphi}^2)$$

لاغرانج

$$L=T-V=\tfrac{1}{2}(2\dot{z}^2+z^2\dot{\varphi}^2)+\tfrac{1}{2}z^2$$ 10

3.

$$p_z=\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}=2\dot{z}\qquad p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=z^2\dot{\varphi}$$

ومنه تحويل لوجندر

$$\dot{z}=\tfrac{1}{2}p_z\qquad \dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{z^2}$$ 10

$$H=\dot{z}p_z+\dot{\varphi}p_\varphi-L=\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}p_z^2+\frac{p_\varphi^2}{z^2}\right)-\tfrac{1}{2}z^2$$

السؤال الثالث (35)

1. صح 5
2. صح 5
3. صح 5
4. خطأ 5
5. خطأ 5
6. خطأ 5
7. خطأ 5

د. عبدالله ...

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

ميكانيك تحليلي
رابعة رياضيات - ميكانيك
حزيران 2014

الاسم :
الرقم :

السؤال الأول : $35 = 7 \times 5$

ليكن E, F فضائيين متجهيين، يملكان القاعدتين $f = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \bar{f}_4\}$ ، $e = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$، ولتكن أيضا $f^* = \{\bar{f}_1^*, \bar{f}_2^*, \bar{f}_3^*, \bar{f}_4^*\}$ و $e^* = \{\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*\}$ القاعدتين الثنويتين، في الفضائين E^*, F^*.

لنضع : $\alpha = \bar{e}_1^* - \bar{e}_2^*$ ، $\beta = \bar{e}_1 \otimes \bar{f}_4$ المطلوب :

1. اعط قاعدة للفضاء $E \vee E$ ،
2. اعط قاعدة للفضاء $F^* \otimes E$ ،
3. كم عدد أبعاد الفضاء $E \wedge E$ ،
4. احسب الجداء التقليصي $\alpha \cdot \beta$ ،
5. احسب $\alpha \otimes \beta$ ،
6. كم عدد أبعاد الفضاء $E \otimes F^*$ ؟
7. إلى أي فضاء ينتمي المقدار $\bar{e}_2^* . \beta$.

السؤال الثاني : $30 = 3 \times 10$

في جملة إحداثية عطالية متعامدة ونظامية $Oxyz$، تتحرك نقطة مادية $P(x, y, z)$ ، كتلتها واحدية، تحت تأثير القوة $\bar{F} = y\,\bar{i} + x\,\bar{j}$ ، وتخضع للقيد المثالي: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ، المطلوب :

1. حدد عدد درجات الحرية، ثمّ طبق المعادلة الأساسية في الديناميك، ثمّ استند من معادلة القيد لإيجاد معادلات الحركة (دون ردود الأفعال).
2. اعط تابع كمون V، وتابع الطاقة الحركية T، ثمّ تابع لاغرانج L، بدلالة المتحولين المعممين R, φ ، ومشتقاتهما بالنسبة للزمن، حيث R طويلة المتجه $\bar{R} = x\,\bar{i} + y\,\bar{j}$ و φ زاوية $\bar{R}$ مع Ox
3. لنرمز لمرافقي المتحولين R, φ بالرمزين ρ, τ ، على الترتيب. أوجد تحويل لوجندر، واكتب تابع هملتون.

السؤال الثالث : $35 = 7 \times 5$

أجب بصح أو بخطأ (**فقط**) عما يلي :

1. تابع لاغرانج تكامل أولي،
2. إذا كان F, G تكاملين أوليين، فإنّ $F + G$ تكامل أولي
3. عدد القيود المستقلة المطبقة على نقطة مادية غير محدود،
4. القيود المثالية تقدم ردود أفعال مجموع أعمالها معدوم،
5. مضاريب لاغرانج هي مجاهيل جديدة تضاف للمسألة،
6. المجموعة المادية المكونة من ثلاث نقاط لا يمكن أن تكون طليقة (بدون قيود)،
7. يمكن اعتبار كل قيد قيداً مثالياً، وذلك بالنظر لجزء من رد فعله على أنه قوة فعالة.

د.خالد العبدالله ـــــــ مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق

السلم التصحيحي — ميكانيك تحليلي — حزيران - ٢٠١٤

السؤال الأول: (35)

1. لدينا القاعدة $\{\vec{e}_1 \vee \vec{e}_1 , \vec{e}_1 \vee \vec{e}_2 , \vec{e}_2 \vee \vec{e}_2\}$ 5

2. لدينا القاعدة $\{\vec{f}^*_i \otimes \vec{e}_j ; i = 1,2,3,4 , j = 1,2\}$ 5

3. عدد أبعاد هذا الفضاء هو "واحد" 5

4. $\alpha \cdot \beta = \vec{f}_4 - 0 = \vec{f}_4$ 5

5. $\alpha \otimes \beta = \vec{e}^*_1 \otimes \vec{e}_1 \otimes \vec{f}_4 - \vec{e}^*_2 \otimes \vec{e}_1 \otimes \vec{f}_4$ 5

6. عدد أبعاد الفضاء المذكور هو "ثمانية" 5

7. إلى F. 5

السؤال الثاني: (30)

1. عدد درجات الحرية هو $n = 2$.
المعادلة الأساسية: $(\ddot{\vec{r}} - \vec{F}) \delta \vec{r} = 0$ ، ومنه:

$$(\ddot{x} - y)\delta x + (\ddot{y} - x)\delta y + \ddot{z}\,\delta z = 0$$

من معادلة القيد نجد:

$$x\,\delta x + y\,\delta y + z\,\delta z = 0$$

بحذف δz نجد:

$$(z\ddot{x} - x\ddot{z} - yz)\delta x + (z\ddot{y} - y\ddot{z} - xz)\delta y = 0$$

ومنه:

$$z\ddot{x} - x\ddot{z} - yz = 0 , \quad z\ddot{y} - y\ddot{z} - xz = 0 \quad 10$$

وهما تمثل مع معادلة القيد معادلات الحركة.

2. لدينا:

$$x = R\cos\varphi , \quad y = R\sin\varphi \quad z = \mp\sqrt{1 - R^2}$$

$$V = -xy = -R^2 \sin\varphi \cdot \cos\varphi$$

$$T = \frac{1}{2}\dot{\vec{r}}^2 = R^2\dot{\varphi}^2 + \frac{\dot{R}^2}{1 - R^2}$$

$\dot{r}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$

$$L = T - V = R^2\dot{\varphi}^2 + \frac{\dot{R}^2}{1 - R^2} + R^2 \sin\varphi\cos\varphi \quad 10$$

3. تحويل لوجندر:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = \frac{2\dot{R}}{1 - R^2} , \quad Z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2R^2\dot{\varphi} \Rightarrow \begin{cases} \dot{R} = \frac{1}{2}(1 - R^2)p \\ \dot{\varphi} = \frac{1}{2}\frac{Z}{R^2} \end{cases}$$

تابع هاملتون:

$$H = p\dot{R} + Z\dot{\varphi} - L = \frac{1}{4}\frac{Z^2}{R^2} + \frac{1}{4}(1 - R^2)p^2 - R^2\sin\varphi\cos\varphi \quad 10$$

السؤال الثالث: (35)

1. خطأ 5   2. صح 5   3. خطأ 5   4. صح 5   5. صح 5   6. خطأ 5   7. صح 5

د. خالد العبدالله

تصوير

سلالم ميكانيك تحليلي + أسئلة دورات

جامعة البعث كلية العلوم قسم الرياضيات	ميكانيك تحليلي رابعة رياضيات - ميكانيك أيلول 2014	الاسم : الرقم :

السؤال الأول : $35 = 7 \times 5$

ليكن E , F فضائيين متجهيين، يملكان القاعدتين $e = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, $f = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ ، ولتكن أيضاً $f^{\bullet} = \{\bar{f}_1^{\bullet}, \bar{f}_2^{\bullet}, \bar{f}_3^{\bullet}\}$ ، و $e^{\bullet} = \{\bar{e}_1^{\bullet}, \bar{e}_2^{\bullet}, \bar{e}_3^{\bullet}\}$ القاعدتين الثنويتين، في الفضائين $E^{\bullet}, F^{\bullet}$.

لنضع : $\alpha = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$ ، $\beta = \bar{e}_1^{\bullet} + \bar{e}_2^{\bullet}$ المطلوب :

1. اعط قاعدة للفضاء $E \wedge E$ ،
2. اعط قاعدة للفضاء $E^{\bullet} \otimes E$ ،
3. كم عدد أبعاد الفضاء $E \wedge E \wedge E$ ،
4. احسب الجداء التقليصي $\alpha \cdot \beta$ ،
5. احسب $\alpha \otimes \beta$ ،
6. هل العبارة $E \wedge F$ معرفة.
7. حدد الفضاء $E \wedge E \wedge E \wedge E$.

السؤال الثاني : $30 = 3 \times 10$

في جملة إحداثية عطالية متعامدة ونظامية $Oxyz$، تتحرك نقطة مادية $P(x, y, z)$ ، كتلتها واحدية، تحت تأثير القوة $\bar{F} = x\,\bar{i} + y\,\bar{j} + z\,\bar{k}$ ، وتخضع للقيدين المثاليين: $x^2 + y^2 = 1,\ z = 0$. المطلوب :

1. حدد عدد درجات الحرية، ثمّ طبق المعادلة الأساسية في الديناميك، ثمّ استفد من معادلات القيود لإيجاد معادلات الحركة (دون ردود الأفعال).
2. اعط تابع كمون V، وتابع الطاقة الحركية T، ثمّ تابع لاغرانج L، بدلالة المتحول المعمم θ، ومشتقاته بالنسبة للزمن، حيث θ زاوية متجه الموضع $\bar{r}$ مع Ox
3. لنرمز لمرافق المتحول θ بالرمز τ أوجد تحويل لوجندر، واكتب تابع هملتون.

السؤال الثالث : $35 = 7 \times 5$

أجب بصح أو بخطأ (**فقط**) عما يلي :

1. تابع هملتون تكامل أولي،
2. إذا كان F, G تكاملين أوليين، فإنّ $F + G + F.G$ تكامل أولي،
3. إذا كان F تكاملا أوليا، و G ليس تكاملا أوليا فإنّ $F + G$ قد يكون تكاملا أوليا،
4. القيد المثالي لا يقدم أي رد فعل،
5. مضاريب لاغرانج هي ثوابت معلومة،
6. المجموعة المادية المكونة من نقطة واحدة لا يمكن أن تخضع لقيود،
7. عدد درجات الحرية لمجموعة المادية مكونة من نقطتين طليقتين هو 6.

د.خالد العبدالله ——— مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق

أيلول 2014 ميكانيك تحليلي سلمى الصباغ

السؤال الأول: 35

1. لدينا القاعدة: $\{\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 , \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 , \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1\}$ 5

2. لدينا القاعدة: $\{\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j ; i,j = 1,2,3\}$ 5

3. عدد أبعاد هذا الفضاء هو واحد 5

4. $\alpha \cdot \beta = 1+0+0+1+0+0 = 2$ 5

5. $\alpha \otimes \beta = \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_2$ 5

6. هذه العبارة غير مرنة وصحيحة 5

7. هذا الفضاء هو الفضاء الصفري 5

السؤال الثاني: 30

1. عدد درجات الحرية $n = 3 - 2 = 1$

المعادلة الأساسية: $(\vec{F} - \ddot{\vec{r}}) \delta \vec{r} = 0$ أي:

$(x - \ddot{x})\delta x + (y - \ddot{y})\delta y + (z - \ddot{z})\delta z = 0$

القيود:

$x\delta x + y\delta y = 0$

$\delta z = 0$

ومنه

$y(x - \ddot{x})\delta x + (y - \ddot{y})(-x\delta x) = 0$

ومنه:

$x\ddot{y} - \ddot{x}y = 0$ 10

هذه المعادلة بالإضافة لمعادلتي القيود تمثل معادلات الحركة

2. تابع الكمون (الطاقة الكامنة):

$\delta V = -\vec{F}\delta\vec{r} = -\frac{1}{2}\delta\vec{r}^2 = 0 \Rightarrow V = 0$

تابع لاغرانج

$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(1)^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2$

$L = T - V = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2$ 10

3. تحويل لوجندر

$q : \theta$ $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \dot{\theta}$

$H = p\dot{\theta} - L = \frac{1}{2}p^2$

مكررة

كلية العلوم
قسم الرياضيات

ميكانيك تحليلي
رابعة رياضيات - ميكانيك
كانون 2013

الاسم :
الرقم :

السؤال الأول : $35 = 7 \times 5$

ليكن E , F فضائين متجهين، يملكان القاعدتين $f = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \bar{f}_4\}$, $e = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ ، ولتكن أيضاً $f^* = \{\bar{f}_1^*, \bar{f}_2^*, \bar{f}_3^*, \bar{f}_4^*\}$ ، و $e^* = \{\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*\}$ القاعدتين الثنويتين، في الفضائين E^*, F^* .

لنضع : $\alpha = 3\bar{e}_1 - \bar{e}_2$. المطلوب :

1. اعط قاعدة للفضاء $E^* \otimes F$ ،
2. اعط قاعدة للفضاء $E \vee E$ ،
3. كم عدد أبعاد الفضاء $F \vee F$ ،
4. كم عدد أبعاد الفضاء $E \otimes F^*$ ،
5. احسب $\alpha \otimes (\bar{f}_1 + \bar{f}_4)$ ،
6. احسب الجداء التقليصي $\alpha \cdot \bar{e}_1^*$ ،
7. إلى أي فضاء ينتمي المقدار $\alpha \cdot \bar{e}_1^*$.

السؤال الثاني : $30 = 3 \times 10$

في الجملة الإحداثية العطالية $Oxyz$ ، تتحرك نقطة مادية $P(x, y, z)$ ، كتلتها واحدية، تحت تأثير قوة الجاذبية $F = \bar{r} - g\,\bar{k}$ ، حيث $\bar{r}$ شعاع الموضع، وتخضع للقيد المثالي: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. المطلوب :

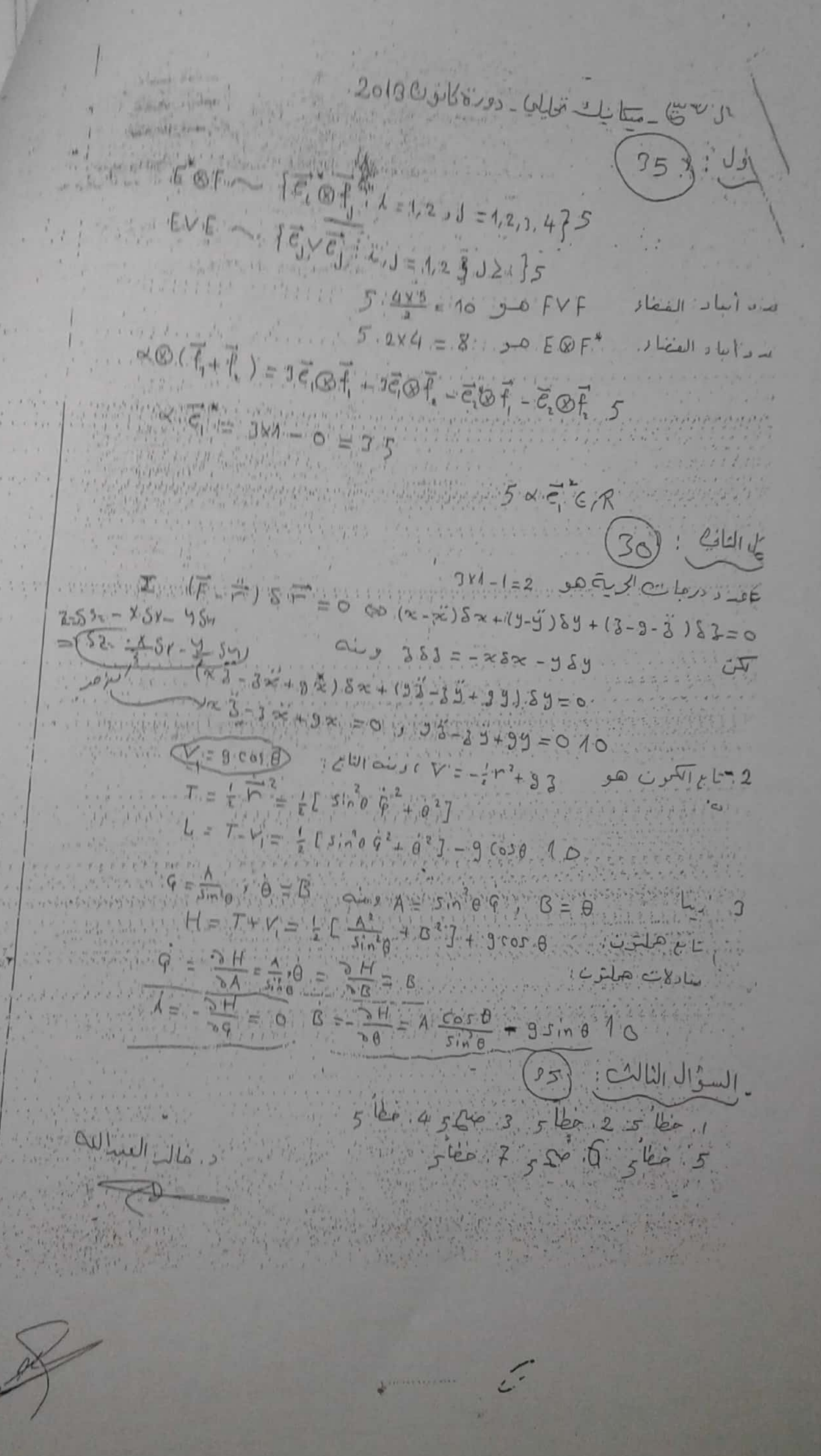
1. حدد عدد درجات الحرية، ثمّ طبق المعادلة الأساسية في الديناميك، ثمّ استند من معادلة القيد لإيجاد معادلات الحركة (دون ردود الأفعال).
2. اعط تابع الكمون V، وتابع الطاقة الحركية T، ثمّ تابع لاغرانج L، بدلالة المتحولين الكرويين φ, θ ، ومشتقاتهما بالنسبة للزمن، حيث φ الزاوية بين مسقط $\bar{r}$ على المستوي Oxy والمحور Ox ، والزاوية θ هي زاوية $\bar{r}$ مع Oz .
3. اعط تابع هملتون، بدلالة φ, θ ومتحولين مرافقين A, B ، واكتب معادلات هملتون.

السؤال الثالث : $35 = 7 \times 5$

أجب بصح أو بخطأ (فقط) عما يلي:

1. التكامل الأولي لا يتعلق بشروط البدء،
2. الجسم الصلب هو مجموعة نقاط مادية لا تخضع لأي قيد،
3. قانون نيوتن يكفي وحده لحل مسائل النقطة المادية الطليقة،
4. عدد درجات الحرية لنقطة مادية غير طليقة هو ثلاث،
5. القيد المثالي هو القيد الذي لا يقدم أي رد فعل،
6. تابع هملتون هو تكامل أولي لمسألته،
7. تابع لاغرانج يساوي تابع هملتون.

د. خالد السدالة — مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق



حل سلم ميكانيك تحليلي - دورة كانون 2013

الأول: (35)

$E^* \otimes F \sim \{\vec{e}_i^* \otimes \vec{f}_j : i = 1,2 ,\ j = 1,2,3,4\}$ 5

$E \vee E \sim \{\vec{e}_i \vee \vec{e}_j : i,j = 1,2 ;\ j \geq i\}$ 5

عدد أبعاد الفضاء $F \vee F$ هو $\frac{4 \times 5}{2} = 10$ 5

عدد أبعاد الفضاء $E \otimes F^*$ هو $2 \times 4 = 8$ 5

$\alpha \otimes (\vec{f}_1 + \vec{f}_2) = 3\vec{e}_1 \otimes \vec{f}_1 + 3\vec{e}_1 \otimes \vec{f}_2 - \vec{e}_2 \otimes \vec{f}_1 - \vec{e}_2 \otimes \vec{f}_2$ 5

$\alpha \cdot \vec{e}_1^* = 3 \times 1 - 0 = 3$ 5

$\alpha \cdot \vec{e}_1^* \in R$ 5

الثاني: (30)

عدد درجات الحرية هو $3 \times 1 - 1 = 2$

$\sum (\vec{F} - \ddot{\vec{r}})\,\delta\vec{r} = 0 \Leftrightarrow (x - \ddot{x})\delta x + (y - \ddot{y})\delta y + (z - g - \ddot{z})\delta z = 0$

$z\delta z - x\delta x - y\delta y \Rightarrow \delta z = -\frac{x}{z}\delta x - \frac{y}{z}\delta y$

لكن $z\delta z = -x\delta x - y\delta y$ ومنه

$(x\ddot{z} - z\ddot{x} + g\dot{x})\delta x + (y\ddot{z} - z\ddot{y} + gy)\delta y = 0$

$x\ddot{z} - z\ddot{x} + gx = 0 \ ,\ y\ddot{z} - z\ddot{y} + gy = 0$ 10

2- تابع الكمون هو $V = -\frac{1}{2}r^2 + gz$، ومنه التابع: $V_1 = g\cos\theta$

$T = \frac{1}{2}\dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2}[\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2]$

$L = T - V_1 = \frac{1}{2}[\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2] - g\cos\theta$ 10

3- لدينا $A = \sin^2\theta\,\dot{\varphi}\ ,\ B = \dot{\theta}$ ومنه $\dot{\varphi} = \frac{A}{\sin^2\theta}\ ,\ \dot{\theta} = B$

تابع هاملتون: $H = T + V_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{A^2}{\sin^2\theta} + B^2\right] + g\cos\theta$

معادلات هاملتون:

$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial A} = \frac{A}{\sin^2\theta}\ ,\ \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial B} = B$

$\dot{A} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0\ ,\ \dot{B} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = A\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} + g\sin\theta$ 10

السؤال الثالث: (35)

1. خطأ 5. 2. خطأ 5. 3. صح 5. 4. خطأ 5
5. خطأ 5. 6. صح 5. 7. خطأ 5

د. خالد العبدالله

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

ميكانيك تحليلي
رابعة رياضيات - ميكانيك
تموز 2013

الاسم :
الرقم :

السؤال الأول : $35 = 7 \times 5$

ليكن E, F فضائيين متجهيين، يملكان القاعدتين $f = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$، $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ ولتكن أيضاً $f^* = (\vec{f_1}^*, \vec{f_2}^*)$ و $e^* = (\vec{e_1}^*, \vec{e_2}^*)$ القاعدتين الثنويتين، في الفضائين F^*, E^*.

لنضع : $\alpha = \vec{e}_1^* - \vec{e}_2^*$ ، $\beta = \vec{e_1} + \vec{e_2}$ المطلوب :

1. اعط قاعدة للفضاء $E^* \otimes F \otimes E$ ،
2. اعط قاعدة للفضاء $E \vee E$ ،
3. كم عدد أبعاد الفضاء $F \wedge F$ ،
4. كم عدد أبعاد الفضاء $E \otimes F^*$ ،
5. احسب $\alpha \otimes \beta$ ،
6. احسب الجداء التقليصي $\alpha \cdot \beta$ ،
7. إلى أي فضاء ينتمي المقدار $\alpha \otimes \beta$.

السؤال الثاني : $30 = 3 \times 10$

في الجملة الإحداثية العطالية $Oxyz$، تتحرك نقطة مادية $P(x, y, z)$ ، كتلتها واحدية، تحت تأثير قوة الجاذبية $\vec{F} = (r^2 - 1)\vec{r}$ ، حيث $\vec{r}$ شعاع الموضع، وتخضع للقيد المثالي: $x - y = 0$. المطلوب :

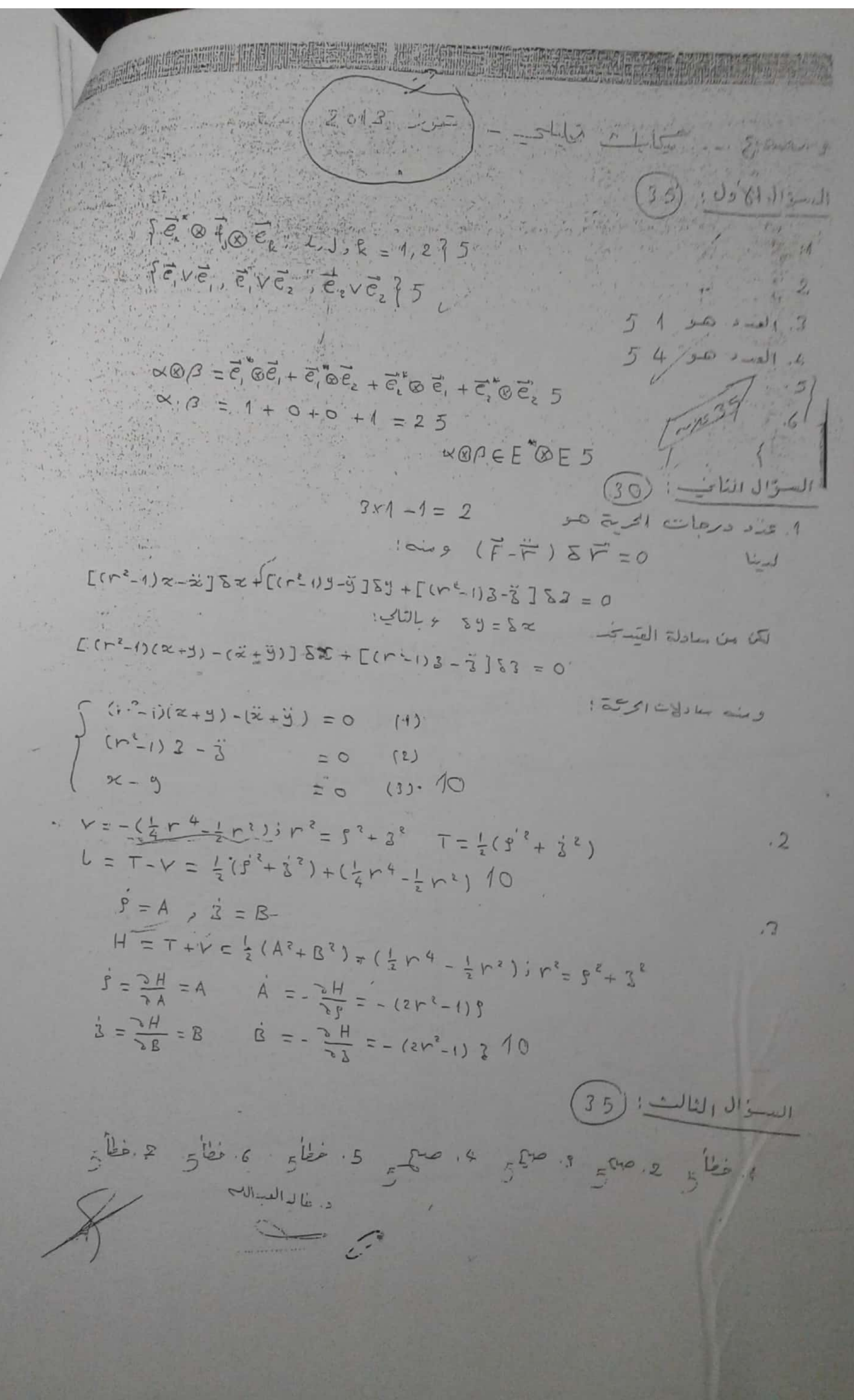
1. حدد عدد درجات الحرية، ثمّ طبق المعادلة الأساسية في الديناميك، ثمّ استند من معادلة القيد لإيجاد معادلات الحركة (دون ردود الأفعال).
2. اعط تابع كمون V، وتابع الطاقة الحركية T، ثمّ تابع لاغرانج L، بدلالة المتحولين المعممين ρ, z ، ومشتقاتهما بالنسبة للزمن، حيث $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.
3. اعط تابع هملتون، بدلالة ρ, z ومتحولين مرافقين A, B ، واكتب معادلات هملتون.

السؤال الثالث : $35 = 7 \times 5$

أجب بصح أو بخطأ (فقط) عما يلي :

1. الجسم الصلب هو مجموعة نقاط مادية تخضع لعدد غير منته من القيود المستقلة،
2. التكامل الأولي يحسب بدلالة شروط البدء،
3. عدد درجات الحرية لنقطة مادية طليقة هو ثلاث،
4. القيد المثالي قد يقدم رد فعل غير معدوم،
5. تابع لاغرانج يعاكس تابع هملتون بالإشارة،
6. قانون نيوتن يكفي وحده لحل كل مسائل الميكانيك،
7. تابع هملتون ليس تكامل أولي لمسألة،

مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق —— د. خالد العبدالله



2013 تشرين — ميكانيك تحليلي — وسمعوج

السؤال الأول: (35)

1.
2.
3. العدد هو 1 — 5
4. العدد هو 4 — 5
5.
6.

$\{\vec{e}_i^{*} \otimes \vec{f}_j \otimes \vec{e}_k ;\ i,j,k = 1,2\}$ 5

$\{\vec{e}_1 \vee \vec{e}_1 ,\ \vec{e}_1 \vee \vec{e}_2 ,\ \vec{e}_2 \vee \vec{e}_2\}$ 5

$\alpha \otimes \beta = \vec{e}_1^{*} \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_1^{*} \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_2^{*} \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_2^{*} \otimes \vec{e}_2$ 5

$\alpha . \beta = 1 + 0 + 0 + 1 = 2$ 5

$\alpha \otimes \beta \in E^{*} \otimes E$ 5

السؤال الثاني: (30)

1. عدد درجات الحرية هو $3 \times 1 - 1 = 2$

لدينا $(\vec{F} - \ddot{\vec{r}})\,\delta \vec{r} = 0$ ومنه:

$$[(r^2-1)x - \ddot{x}]\delta x + [(r^2-1)y - \ddot{y}]\delta y + [(r^2-1)z - \ddot{z}]\delta z = 0$$

لكن من معادلة القيد $\delta y = \delta x$ وبالتالي:

$$[(r^2-1)(x+y) - (\ddot{x}+\ddot{y})]\delta x + [(r^2-1)z - \ddot{z}]\delta z = 0$$

ومنه معادلات الحركة:

$$\begin{cases} (r^2-1)(x+y) - (\ddot{x}+\ddot{y}) = 0 & (1) \\ (r^2-1)z - \ddot{z} = 0 & (2) \\ x - y = 0 & (3) \end{cases}$$ 10

2. $V = -(\frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{2}r^2) ;\ r^2 = \rho^2 + z^2 \quad T = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2)$

$L = T - V = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2) + (\frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{2}r^2)$ 10

3. $\dot{\rho} = A ,\ \dot{z} = B$

$H = T + V = \frac{1}{2}(A^2 + B^2) - (\frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{2}r^2) ;\ r^2 = \rho^2 + z^2$

$\dot{\rho} = \frac{\partial H}{\partial A} = A \qquad \dot{A} = -\frac{\partial H}{\partial \rho} = -(2r^2-1)\rho$

$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial B} = B \qquad \dot{B} = -\frac{\partial H}{\partial z} = -(2r^2-1)z$ 10

السؤال الثالث: (35)

1. خطأ 5 2. صح 5 3. صح 5 4. صح 5 5. خطأ 5 6. خطأ 5 7. خطأ

د. خالد العبدالله

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

ميكانيك تحليلي
رابعة رياضيات - ميكانيك
أيار 2013

الاسم :
الرقم :

السؤال الأول : $35 = 7 \times 5$

ليكن E, F فضائيين متجهيين، يملكان القاعدتين $e = \{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ ، $f = \{\overline{f_1}, \overline{f_2}\}$ ، ولتكن أيضا $f^* = \{\overrightarrow{f_1^*}, \overrightarrow{f_2^*}\}$ و $e^* = \{\overrightarrow{e_1^*}, \overrightarrow{e_2^*}, \overrightarrow{e_3^*}\}$ القاعدتين الثنويتين، في الفضائين E^*, F^*.

لنضع : $\alpha = 2\bar{e}_1^* - 3\bar{e}_2^*$ ، $\beta = 5\overline{e_1} - 7\overline{e_2} + \overline{e_3}$ المطلوب :

1. اعط قاعدة للفضاء $F \otimes E$ ،
2. اعط قاعدة للفضاء $E \wedge E$ ،
3. كم عدد أبعاد الفضاء $F \vee F$ ،
4. كم عدد أبعاد الفضاء $E^* \wedge E^*$ ،
5. احسب $\alpha \otimes \beta$ ،
6. احسب الجداء التقليصي $\alpha \cdot \beta$ ،
7. إلى أي فضاء ينتمي المقدار $\alpha . \overline{e_3}$.

محاضرة 7

السؤال الثاني : $30 = 3 \times 10$

في الجملة الإحداثية العطالية $Oxyz$، تتحرك نقطة مادية $P(x, y, z)$، كتلتها واحدية، تحت تأثير القوة $r \neq 0$ ، $\bar{F} = \frac{\bar{r}}{r}$، حيث $\bar{r}$ شعاع الموضع، وتخضع للقيد المثالي: $x + y - 6 = 0$. المطلوب :

1. حدد عدد درجات الحرية، ثمّ طبق المعادلة الأساسية في الديناميك، ثمّ أوجد معادلات الحركة باستخدام طريقة مضاريب لاغرانج (دون ردود الأفعال).
2. اعطِ تابع كمون V، وتابع الطاقة الحركية T، ثمّ تابع لاغرانج L، بدلالة المتحولين المعممين x, z ، ومشتقاتهما بالنسبة للزمن .
3. اعط تابع هملتون، بدلالة x, z ومتحولين مرافقين A, B ، واكتب معادلات هملتون.

السؤال الثالث : $35 = 7 \times 5$

أجب بصح أو بخطأ (**فقط**) عما يلي :

1. القيد المثالي يقدم رد فعل عمله معدوم،
2. الجسم الصلب هو مجموعة نقاط مادية غير منتهية تخضع لعدد منته من القيود،
3. التكاملات الأولية في مسألة هي شروط البدء،
4. تابع هملتون هو تابع لاغرانج معبر عنه بدلالة متحولات أخرى،
5. عدد درجات الحرية لنقطة مادية مقيدة هو أكثر من ثلاث حتما،
6. قانون نيوتن يكفي وحده لحل كل مسائل الميكانيك،
7. تابع لاغرانج ليس تكاملا أوليا.

مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق — د. خالد العبدالله

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

ميكانيك تحليلي
رابعة رياضيات - ميكانيك
آب 2013

سلم تصحيح

السؤال الأول : (35)

1. لدينا القاعدة $\{\bar{f}_i \otimes \bar{e}_j : i=1,2,\ j=1,2,3\}$ ، 5
2. لدينا القاعدة $\{\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2,\ \bar{e}_2 \wedge \bar{e}_3,\ \bar{e}_3 \wedge \bar{e}_1\}$ 5
3. العدد هو 3 ، 5
4. العدد هو 3 ، 5
5. لدينا $\alpha \otimes \beta = 10\bar{e}_1^{*} \otimes \bar{e}_1 - 14\bar{e}_1^{*} \otimes \bar{e}_2 + 2\bar{e}_1^{*} \otimes \bar{e}_3 - 15\bar{e}_2^{*} \otimes \bar{e}_1 + 21\bar{e}_2^{*} \otimes \bar{e}_2 - 3\bar{e}_2^{*} \otimes \bar{e}_3$ ، 5
6. الجداء التقليصي هو $\alpha \cdot \beta = 10-0+0-0+21-0=31$ ، 5
7. وضوحاً $\alpha . \bar{e}_3 \in \mathbb{R}$ ، 5

السؤال الثاني : (30)

1. عدد درجات الحرية هو $3-1=2$ ،

المعادلة الأساسية في الديناميك هي:

$$(\ddot{\bar{r}} - \frac{\bar{r}}{r})\delta \bar{r} = 0$$

أي

$$(\ddot{x} - \frac{x}{r})\delta x + (\ddot{y} - \frac{y}{r})\delta y + (\ddot{z} - \frac{z}{r})\delta z = 0$$

من معادلة القيد نجد:

$$\lambda \delta x + \lambda \delta y + 0 \delta z = 0$$

بالجمع واستخدام تقنية لاغرانج نجد المعادلات :

$$\begin{cases} \ddot{x} - \frac{x}{r} + \lambda = 0 & (1) \\ \ddot{y} - \frac{y}{r} + \lambda = 0 & (2) \\ \ddot{z} - \frac{z}{r} = 0 & (3) \end{cases}$$

10

تمثل هذه المعادلات بالإضافة لمعادلة القيد معادلات كافية لدراسة الحركة.

2. لدينا تابع الكمون $V = -r = -\sqrt{x^2 + (6-x)^2 + z^2}$ ،

وتابع الطاقة الحركية $T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}(2\dot{x}^2 + \dot{z}^2)$ ،

ومنه تابع لاغرانج $L = T - V = \frac{1}{2}(2\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \sqrt{x^2 + (6-x)^2 + z^2}$ ، 10

$$\begin{cases} A = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x} \\ B = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \dot{z} \end{cases}$$

ومنه تحويل لوجندر φ التالي:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2}A \\ \dot{z} = B \end{cases}$$

ومنه تابع هملتون :

$$H = (\dot{x}A + \dot{z}B - L)\circ\varphi$$

$$= \frac{1}{2}A^2 + B^2 - (\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{2}B^2 + \sqrt{x^2 + (6-x)^2 + z^2})$$

$$= \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{2}B^2 - \sqrt{x^2 + (6-x)^2 + z^2}$$

ومعادلات هملتون:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial A} = \frac{1}{2}A$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial B} = B$$

$$\dot{A} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{2x-6}{r}$$

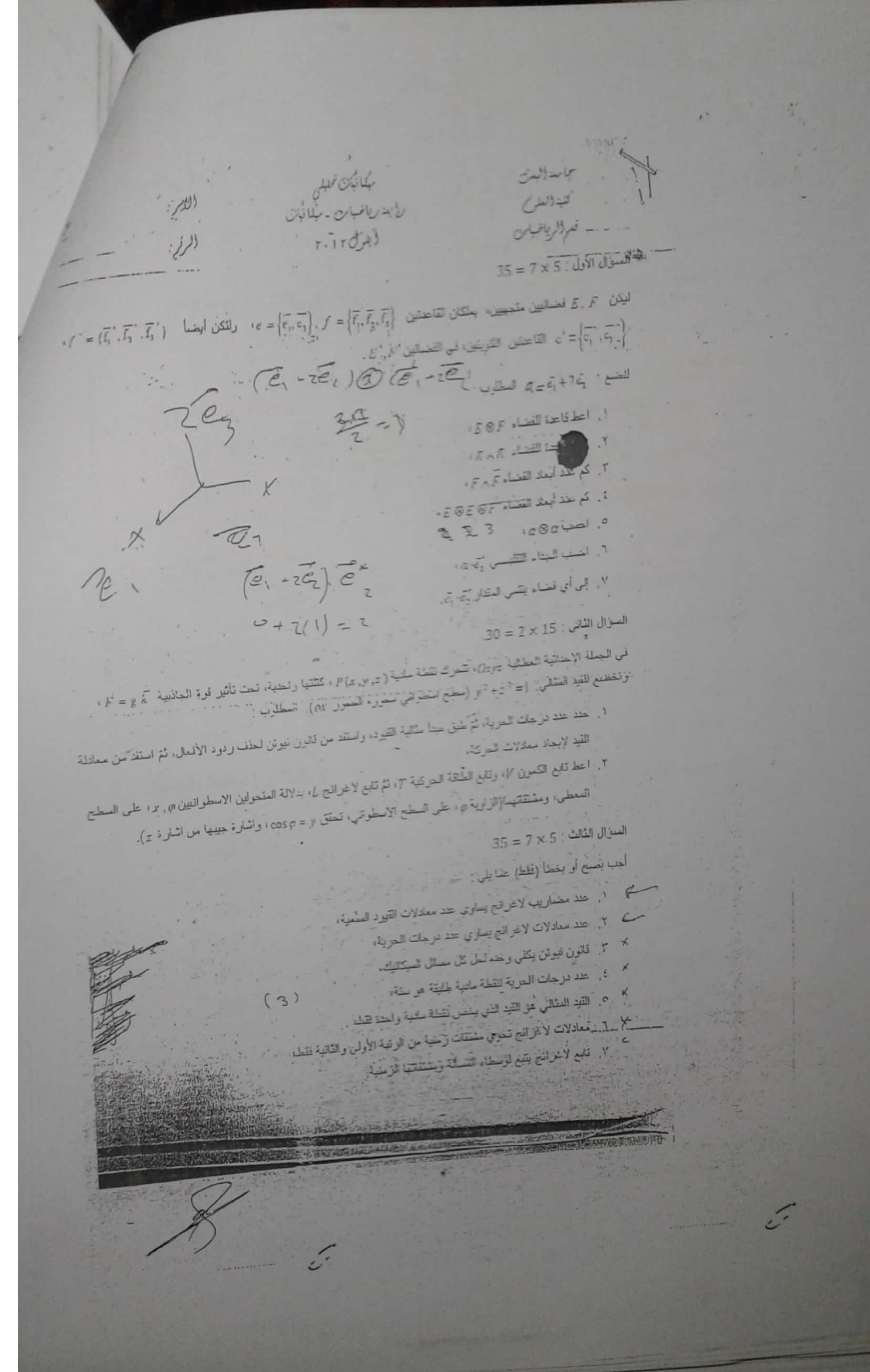
$$\dot{B} = -\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

10

السؤال الثالث : (35)

1. صح 5
2. خطأ 5
3. خطأ 5
4. خطأ 5
5. خطأ 5
6. خطأ 5
7. صح 5

د. خالد العبدالله



جامعة البعث — كلية العلوم — قسم الرياضيات

ميكانيك تحليلي — رابعة رياضيات - ميكانيك — أيلول ٢٠١٢

الاسم: — الرقم:

السؤال الأول: $5 \times 7 = 35$

ليكن E, F فضائيين متجهين، يملكان القاعدتين $e = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$، $f = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ ولتكن ايضا $f' = \{\bar{f}_1', \bar{f}_2', \bar{f}_3'\}$، $e' = \{\bar{e}_1', \bar{e}_2'\}$ القاعدتين الثنويتين في الفضائيين E', F'.

لنضع $a = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$ المطلوب:

1. اعط قاعدة الفضاء $E \otimes F$،
2. [illegible] الفضاء $E \wedge E$،
3. كم عدد أبعاد الفضاء $F \wedge F$،
4. كم عدد أبعاد الفضاء $E \otimes E \otimes F$،
5. احسب $a \otimes a$،
6. احسب الجداء الداخلي $a \cdot \bar{e}_2^*$،
7. إلى أي فضاء ينتمي المتجه $\bar{e}_1 \bar{e}_2$.

السؤال الثاني: $15 \times 2 = 30$

في الجملة الإحداثية المطلقة $Oxyz$، تتحرك نقطة مادية $P(x, y, z)$، كتلتها واحدية، تحت تأثير قوة الجاذبية $\bar{F} = g\,\bar{k}$، وتخضع للقيد المثالي: $y^2 + z^2 = 1$ (سطح اسطواني محوره المحور ox). المطلوب:

1. حدد عدد درجات الحرية، ثم طبق مبدأ مثالية القيود، واستفد من قانون نيوتن لحذف ردود الأفعال، ثم استفد من معادلة القيد لإيجاد معادلات الحركة.
2. اعط تابع الكمون V، وتابع الطاقة الحركية T، ثم تابع لاغرانج L، بدلالة المتحولين الاسطوانيين x, φ على السطح المعطى، ومشتقتيهما (الزاوية φ، على السطح الأسطواني، تحقق $\cos\varphi = y$، وإشارة جيبها من إشارة z).

السؤال الثالث: $5 \times 7 = 35$

أجب بصح أو بخطأ (فقط) عما يلي:

1. عدد مضاريب لاغرانج يساوي عدد معادلات القيود الضمنية،
2. عدد معادلات لاغرانج يساوي عدد درجات الحرية،
3. قانون نيوتن يكفي وحده لحل كل مسائل الميكانيك،
4. عدد درجات الحرية لنقطة مادية طليقة هو ستة،
5. القيد المثالي هو القيد الذي يخص نقطة مادية واحدة فقط،
6. معادلات لاغرانج تحوي مشتقات زمنية من الرتبة الأولى والثانية فقط،
7. تابع لاغرانج يتبع لوسطاء الجملة ومشتقاتها الزمنية.

(3)

تمارين

طريقة ثانية لحل التمرين السابق:

$$\vec{F} = -\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{\vec{r}}{r^2} \quad ; \; r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$dr = \frac{x}{r}dx + \frac{y}{r}dy + \frac{z}{r}dz = \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow$$

$$\vec{F} = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{dr}{r} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\frac{dr}{r}}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \; ; \; m = 1 \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}$$

$$dV = -\vec{F} \Rightarrow dV = \frac{dr}{r} \Rightarrow \boxed{V = \ln r} \quad \text{أو} \quad \boxed{V = \frac{1}{2}\ln r^2}$$

$$\boxed{L = T - V = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}\ln r^2}$$ لاغرانجي

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{x}{r^2} &= 0 \\ \ddot{y} + \frac{y}{r^2} &= 0 \\ \ddot{z} + \frac{z}{r^2} &= 0 \end{aligned}}$$

معادلات لاغرانج الثلاثة

$$H = (\dot{x}X + \dot{y}Y + \dot{z}Z - L) \text{ of } (x, y, z \,;\, X, Y, Z) \; ;$$ تحويل لوجندر

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_k} = q_k} \Rightarrow \boxed{\dot{x} = X \,,\, \dot{y} = Y \,,\, \dot{z} = Z}$$

$$\Rightarrow H = (X^2 + Y^2 + Z^2) - \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{2}\ln r^2$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{2}\ln r^2}$$ هاملتوني

معادلات هاملتون:

$$\dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k} \;,\; \dot{q}_k = -\frac{\partial H}{\partial p_k} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} - X &= 0 \\ \dot{y} - Y &= 0 \\ \dot{z} - Z &= 0 \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} \dot{X} + \frac{x}{r^2} &= 0 \\ \dot{Y} + \frac{y}{r^2} &= 0 \\ \dot{Z} + \frac{z}{r^2} &= 0 \end{aligned}}$$

معادلات هاملتون الستة

جامعة البعث — الميكانيك التحليلي — الاسم:

كلية العلوم — وارجة ميكانيك — الرقم:

قسم الرياضيات — كانون 08

السؤال الأول: $20 = 5 \times 4$

ليكن الفضاء المتجهي E ، المزود بالقاعدة $\Omega_E = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ ، ولتكن قاعدتها الثنوية: $\Omega_E^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*)$ في الفضاء E^* ، وليكن أيضاً الموتر (التنسوري) $\mu = e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*$.

المطلوب:

1. أعط قاعدة الفضاء $E \wedge E \wedge E$.
2. احسب $\mu(e_1 - e_2, e_3, e_2)$.
3. ما عدد أبعاد الفضاء $E \vee E$.
4. احسب $(e_1^* \vee e_2^*)(e_3, e_1)$.

السؤال الثاني: $40 = 10 \times 4$

تتحرك نقطة مادية، ذات كتلة واحدية، في جملة إحداثية متعامدة ونظامية $Oxyz$ ، مزودة ترتيباً بمتجهات الواحدة $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ، وتخضع هذه النقطة لحقل القوى $\vec{F} = -\frac{\vec{R}}{R^3} + z\vec{k}$ ، حيث $\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ، و $R = \sqrt{x^2 + y^2}$. المطلوب:

1. اكتب تابع لاغرانج L ، وأعط العلاقات التي تعرف المتغيرات X, Y, Z المرافقة ترتيباً للمتغيرات x, y, z .
2. أعطي هاملتوني المسألة H ، واكتب معادلات هاملتون.
3. لتكن الدالتين $H_1 = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) - \frac{1}{R}$ ، و $H_2 = \frac{1}{2}Z^2 - \frac{1}{2}z^2$ ، اختبر أحدهما، وبرهن أنها تكامل أولي، ثم استنتج أن الأخرى تكامل أولي.
4. بين تعارض أو عدم تعارض التكاملين الأوليين H_1, H_2 .

السؤال الثالث: $20 = 5 \times 4$

أجب بكلمة صح أو بكلمة خطأ لكل مما يلي:

1. التحويلات القانونية، تحافظ على تابع هاملتون.
2. يكفي قانون نيوتن وحده لحل جميع مسائل الميكانيك.
3. الانتقال الافتراضي ملائم للقيود، دائماً.
4. كون إحدى الدالتين المتعارضتين تكاملاً أولياً لا يعني بالضرورة أن الأخرى تكامل أولي.

مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق

الدكتور ...

سلم التصحيح ميكانيك تحليلي أيلول ٢٠١٢

السؤال الأول: (35)

1. $\{\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j : i, j = 1, 2\}$ 5

2. $\{\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2\}$ 5

3. العدد هو 3 5

4. العدد هو $2 \times 2 \times 3 = 12$ 5

5. $\alpha \otimes \alpha = \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + 2\,\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 + 4\,\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2$ 5

6. $\alpha \cdot e_2 = 0 + 2 = 2$ 5

7. الحل R 5

السؤال الثاني: (28)

1. عدد درجات الحرية $= 2$. لدينا $R_x \delta x + R_y \delta y + R_z \delta z = 0$

$$\begin{cases} R_x + 0 = \ddot{x} \\ R_y + 0 = \ddot{y} \\ R_z + g = \ddot{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_x = \ddot{x} \\ R_y = \ddot{y} \\ R_z = \ddot{z} - g \end{cases}$$

ومنه: $\ddot{x}\,\delta x + \ddot{y}\,\delta y + (\ddot{z} - g)\,\delta z = 0$

لدينا: $y\,\delta y + z\,\delta z = 0$

ومنه $\ddot{x}\,z\,\delta x + \ddot{y}\,z\,\delta y - (\ddot{z} - g)\,y\,\delta y = 0$

$\ddot{x}\,z\,\delta x + (\ddot{y}z - \ddot{z}y + gy)\,\delta y = 0$

وبالتالي: $(\ddot{x}z = 0 \;,\; \ddot{y}z - \ddot{z}y + gy = 0)$ 15

2.

$V = -gz = -g\sin\varphi$

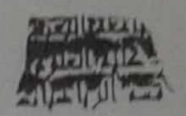
$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2)$

$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2) + g\sin\varphi$ 15

السؤال الثالث: (35)

1. صح 5 ، 2. صح 5 ، 3. خطأ 5 ، 4. خطأ 5 ، 5. خطأ 5 ، 6. صح 5 ، 7. صح 5

د. خالد العبد الله



ميكانيك تحليلي
رابعة رياضيات - ميكانيك
كانون 2013

الاسم :
الرقم :

السؤال الأول : $5 \times 7 = 35$

ليكن E , F فضاءين متجهيين، يملكان القاعدتين $f = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \bar{f}_4\}$, $e = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ ، ولتكن أيضاً $f^* = \{\bar{f}_1^*, \bar{f}_2^*, \bar{f}_3^*, \bar{f}_4^*\}$ ، و $e^* = \{\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*\}$ القاعدتين الثنويتين، في الفضائين F^*, E^*.

لنضع : $\alpha = 3\bar{e}_1 - \bar{e}_2$ ، المطلوب :

1. اعط قاعدة للفضاء $E^* \otimes F$ ،
2. اعط قاعدة للفضاء $E \vee E$ ،
3. كم عدد أبعاد الفضاء $F \vee F$ ،
4. كم عدد أبعاد الفضاء $E \otimes F^*$ ،
5. احسب $\alpha \otimes (\bar{f}_1 + \bar{f}_4)$ ،
6. احسب الجداء التقليصي $\alpha \cdot \bar{e}_1^*$ ،
7. إلى أي فضاء ينتمي المقدار $\alpha \cdot \bar{e}_1^*$.

السؤال الثاني : $10 \times 3 = 30$

في الجملة الإحداثية المطالية $Oxyz$ ، تتحرك نقطة مادية $P(x, y, z)$ ، كتلتها واحدية، تحت تأثير قوة الجاذبية $F = \bar{r} - g\,\bar{k}$ ، حيث $\bar{r}$ شعاع الموضع، وتخضع للقيد المثالي: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ، المطلوب :

1. حدد عدد درجات الحرية، ثمّ طبق المعادلة الأساسية في الديناميك، ثمّ استند من معادلة القيد لإيجاد معادلات الحركة (دون ردود الأفعال).
2. اعط تابع الكمون V، وتابع الطاقة الحركية T، ثمّ تابع لاغرانج L، بدلالة المتحولين الكرويين φ, θ ، ومشتقاتهما بالنسبة للزمن، حيث φ الزاوية بين مسقط $\bar{r}$ على المستوي Oxy والمحور Ox ، والزاوية θ هي زاوية $\bar{r}$ مع Oz.
3. اعط تابع هملتون، بدلالة φ, θ ومتحولين مرافقين A, B ، واكتب معادلات هملتون.

السؤال الثالث : $5 \times 7 = 35$

أجب بصح أو بخطأ (**فقط**) عما يلي:

1. التكامل الأولي لا يتعلق بشروط البدء،
2. الجسم الصلب هو مجموعة نقاط مادية لا تخضع لأي قيد،
3. قانون نيوتن يكفي وحده لحل مسائل النقطة المادية الطليقة،
4. عدد درجات الحرية لنقطة مادية غير طليقة هو ثلاث،
5. القيد المثالي هو القيد الذي لا يقدم أي رد فعل،
6. تابع هملتون هو تكامل أولي لمسألته،
7. تابع لاغرانج يساوي تابع هملتون.

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتوفيق — د. خالد الصباغ

جامعة البعث — كلية العلوم — قسم الرياضيات

ميكانيك تحليلي — رابعة رياضيات - ميكانيك — أ ع ٢٠١١

الاسم: — الرقم:

٨٥ / ٩٠

السؤال الأول : $5 \times 5 = 25$

ليكن E, F فضائيين متجهيين، بملكان القاعدتين $\mathcal{f} = \{\bar{f}_1\}$ ، $e = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$، ولتكن أيضاً $f^* = \{\bar{f}_1^*\}$ و $e^* = \{\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*, \bar{e}_3^*\}$ القاعدتين الثنويتين، في الفضائين E^*, F^*.

لنضع : $\alpha = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_1$ ، و $\beta = \bar{e}_1^* + \bar{e}_2^*$. المطلوب :

١. اعط قاعدة للفضاء $E^* \otimes F$ ،
٢. كم عدد أبعاد الفضاء $E \otimes E^* \otimes F$ ،
٣. احسب $\alpha \otimes \beta$ ؛
٤. احسب الجداء التقلصي $\alpha . \beta$ ،
٥. إلى أي فضاء ينتمي المقدار $\alpha \otimes \beta$.

السؤال الثاني : $5 \times 10 = 50$

في الجملة الإحداثية المطلقة $Oxyz$، تتحرك نقطة مادية $P(x, y, z)$ ، كتلتها واحدية تحت تأثير قوة الجاذبية $\bar{F} = -g\,\bar{k}$ ، وتخضع للقيد المثالي $x^2 + y^2 = (5 - z)^2$ (مخروط موضح بالشكل). المطلوب :

١. طبق طريقة مضاريب لاغرانج، وحدد المعادلات اللازمة لحل المسألة،
٢. اعط تابع الكمون V، وتابع الطاقة الحركية T، ثم تابع لاغرانج L، بدلالة المتحول φ، الموضح، والمتحول z ومشتقتيهما،
٣. لنرمز لمرافقي المتحولين φ, z بالرمزين σ, τ ، على الترتيب. أوجد تحويل لوجندر، واعط تابع هملتون H،
٤. برهن أن σ تكامل أولي،
٥. استنتج أن سرعة الدوران الأفقي $|\dot{\varphi}|$، تكون أبطأ كلما ابتعد المتحرك عن رأس المخروط.

السؤال الثالث : $5 \times 5 = 25$

أجب بصح أو بخطأ (فقط) عما يلي :

١. إذا كان F تكاملاً أولياً، فإن $F^2 + F$ تكاملاً أولياً، بالضرورة،
٢. التكاملات الأولية هي مقادير معدومة،
٣. قانون نيوتن يكفي وحده لحل كل مسائل الميكانيك،
٤. عدد معادلات هملتون، هو نفس عدد معادلات لاغرانج،
٥. مثالية القيود تعني انعدام ردود أفعالها.

د. خالد الصباغ

مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

ميكانيك تحليلي
رابعة رياضيات - ميكانيك
كانون 2009

الاسم:
الرقم: ١٦٣٠٨

السؤال الأول : $20 = 5 \times 4$

ليكن E فضاءً متجهيا، عدد أبعاده 3، ويملك القاعدة $\Omega = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$، و E^* فضاءه الثنوي، ولتكن $\Omega^* = \{\overrightarrow{e_1}^*, \overrightarrow{e_2}^*, \overrightarrow{e_3}^*\}$ القاعدة الثنوية للقاعدة Ω. لنضع $A = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$، و $B = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$. المطلوب :

1. اعط قاعدة للفضاء $E \wedge E$،
2. احسب $A \wedge B$، بدلالة القاعدة السابقة،
3. احسب $A \wedge B \wedge \overrightarrow{e_1}$، ?
4. احسب الجداء التقليصي $\overrightarrow{e_1}^* \cdot (A \wedge B)$.

السؤال الثاني : $40 = 10 \times 4$

في الجملة الإحداثية $Oxyz$، تتحرك نقطة مادية $P(x, y, z)$، كتلتها m، تحت تأثير القوة $\vec{F} = (a - r)\frac{\vec{r}}{r}, \quad a \in \mathcal{R}^{(+)}$، حيث $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$، والمطلوب :

1. اعط تابع الكمون V، وتابع الطاقة الحركية T، ثمّ تابع لاغرانج L،
2. لنرمز لمرافقات x, y, z بالرموز X, Y, Z، على الترتيب، اوجد تحويل لوجندر، واعط تابع هملتون H،
3. لنضع $C_x = yZ - zY$. برهن أنّ C_x تكامل أولي بالنسبة لتابع هملتون H،
4. لنضع $C_y = zX - xZ$، $C_z = xY - yX$. احسب أقواس بواسون $\{C_y, C_z\}$، وقارن مع C_x.

السؤال الثالث : $20 = 5 \times 4$

اجب بصح أو بخطأ (فقط) عما يلي :

1. مبدأ مثالية القيود يستنتج من قانون نيوتن، خطأ لأن هذا المبدأ ليس نتيجة بل هو فرضية.
2. صح تكون ردود الأفعال المطبقة على نقطة مادية معدومة، عند عدم وجود قيود،
3. عدد معادلات هملتون، لجملة هلونومية، هو نفس عدد معادلات لاغرانج، خطأ وإنما هو ضعف عدد معادلات لاغرانج
4. H^2 ليس تكاملاً أوليا في مسألة تابع هملتون فيها هو H. خطأ

{ دورة كانون ١ }

حل السؤال الأول :

[١] علينا أن نلاحظ مرتبة عدد أبعاد الفضاء $E \wedge E$ = $\frac{n(n-1)}{2}$

$n = 3 \Leftarrow \quad 3 = \frac{3(2)}{2}$

$\Leftarrow \{ (e_1 \wedge e_2), (e_1 \wedge e_3), (e_2 \wedge e_3) \}$ ويمكن أن تكون قاعدة ..

[٢]

$$\left.\begin{array}{l} A = e_1 + e_2 \\ B = e_1 - e_2 \end{array}\right\} \Rightarrow A \wedge B = (e_1 + e_2) \wedge (e_1 - e_2)$$

$$= \underbrace{e_1 \wedge e_1}_{0} - e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_1 - \underbrace{e_2 \wedge e_2}_{0}$$

لكن:

$$A \wedge B = -2 e_1 \wedge e_2 \Leftarrow \left\{ \begin{array}{l} e_1 \wedge e_1 = e_2 \wedge e_2 = 0 \\ e_1 \wedge e_2 = -e_2 \wedge e_1 \end{array} \right.$$

[٣]

$$A \wedge B \wedge \vec{e}_1 = -2\, e_1 \wedge e_2 \wedge e_1$$

$$= -2 \{ e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_1$$

$$- e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 \}$$

$$= -2(0) = 0$$

• ملاحظة مهمة جداً : عندما تكون التبديلة زوجية تكون (+1) ← موجب

{ = فردية = (-1) ← سالب

[٤]

لذا علينا تعريف الجداء الخارجي لـ تنسوري

$$(A \wedge B) \cdot \vec{e}_1^{*} = (-2 e_1 \wedge e_2) \cdot e_1^{*}$$

$$-2 e_1 \wedge e_2 = -2 (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1)$$

$$\Rightarrow (A \wedge B) \cdot e_1^{*} = (-2 e_1 \otimes e_2 + 2 e_2 \otimes e_1)(e_1^{*})$$

$$= -2 e_1 \otimes \underbrace{e_2 \cdot e_1^{*}}_{0} + 2 e_2 \otimes \underbrace{e_1 \cdot e_1^{*}}_{1} = -2 e_2$$

• ملاحظة هامة جداً جداً [illegible]

يوجد فرق شاسع بين التقليص من اليمين ومن اليسار (الجواب يختلف)

حل السؤال الثاني :

[1]

$$\vec{F} = (a-r)\frac{\vec{r}}{r}$$

إن شعاع الموضع للنقطة المادية P :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

• تابع الطاقة الحركية T :

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

• تابع الكمون V : نبحث عن الدالة V بحيث :

$$\overrightarrow{grad}\, V = -\vec{F} \Rightarrow \frac{dV}{d\vec{r}} = -\vec{F}$$

$$\Rightarrow dV = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -(a-r)\frac{\vec{r}}{r} d\vec{r}$$

$$\Rightarrow dV = -(a-r)\, dr$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2}(a-r)^2 \quad ; a \in R^+$$

• تابع لاغرانج : $L = T - V$:

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}(a-r)^2$$

[2] تحويل لوجندر :

من $\dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i}$ حيث $\dot{p}_1 = \dot{x}$, $\dot{p}_2 = \dot{y}$, $\dot{p}_3 = \dot{z}$ & المرافقات $q_1 = X$, $q_2 = Y$, $q_3 = Z$

بالتعويض :

$$X = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{X}{m}$$

$$Y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \Rightarrow \dot{y} = \frac{Y}{m}$$

$$Z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{Z}{m}$$

• ملاحظة :

من الضروري جداً جداً في تحويل لوجندر وضع المشتق بطرف والباقي بطرف ...

• تابع هاملتون :

$$H = \left(\sum_{i=1}^{3} q_i \dot{p}_i - L\right) \circ \mathcal{L}(p, q)$$

$$\Rightarrow H = \left[X\cdot\dot{x} + Y\cdot\dot{y} + Z\cdot\dot{z} - \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(a - r^2)\right] \circ \mathcal{L}(x, y, z, X, Y, Z)$$

$$\Rightarrow H = X \cdot \frac{X}{m} + Y \cdot \frac{Y}{m} + Z \cdot \frac{Z}{m} - \frac{1}{2} m \left(\frac{X^2}{m^2} + \frac{Y^2}{m^2} + \frac{Z^2}{m^2} \right) + \frac{1}{2} (a - r)^2$$

$$= \frac{1}{m} (X^2 + Y^2 + Z^2) - \frac{1}{2} \frac{1}{m} (X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{2} (a - r)^2$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2m} (X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{2} (a - r)^2$$

• معادلات هاملتون غير مطلوبة بنفس السؤال ... حرك

[٢] $c_x = yZ - zY$ حتى يكون تكامل أولي يجب أن يتحقق : $\{H, c_x\} = 0$:

$$\{H, c_x\} = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial c_x}{\partial X} - \frac{\partial H}{\partial X} \cdot \frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{\partial c_x}{\partial Y} - \frac{\partial H}{\partial Y} \cdot \frac{\partial c_x}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \cdot \frac{\partial c_x}{\partial Z} - \frac{\partial H}{\partial Z} \cdot \frac{\partial c_x}{\partial z}$$

$$= \left(\frac{X}{m}\right)(0) - \left(\left(\frac{a-r}{r}\right) x\right)(0) + \left(\frac{Y}{m}\right)(Z) - \left(\left(\frac{a-r}{r}\right) y\right)(-z) + \left(\frac{Z}{m}\right)(-Y) - \left(\left(\frac{a-r}{r}\right) z\right)(y)$$

$$= 0 - 0 + \frac{1}{m} YZ - \frac{1}{m} YZ - \left(\frac{a-r}{r}\right)[-yz + yz]$$

$$= 0 + \left(\frac{a-r}{r}\right)(0) = 0$$

الشرط محقق ⟸ c_x تكامل أولي ...

[٤] $c_Y = zX - xZ$ ، $c_Z = xY - yX$ ولنحسب $\{c_Y, c_Z\}$:

$$\{c_Y, c_Z\} = \frac{\partial c_Y}{\partial x} \cdot \frac{\partial c_Z}{\partial X} - \frac{\partial c_Y}{\partial X} \cdot \frac{\partial c_Z}{\partial x} + \frac{\partial c_Y}{\partial y} \cdot \frac{\partial c_Z}{\partial Y} - \frac{\partial c_Y}{\partial Y} \cdot \frac{\partial c_Z}{\partial y} + \frac{\partial c_Y}{\partial z} \cdot \frac{\partial c_Z}{\partial Z} - \frac{\partial c_Y}{\partial Z} \cdot \frac{\partial c_Z}{\partial z}$$

$$= (-Z)(-y) - (+Z)(+y) + (0) - (0) = -zY + yZ = yZ - zY = c_x$$

$\Leftarrow \{c_Y, c_Z\} = c_x$

by: saleh al-aswad

{دورة كانون ٨٠}

حل السؤال الأول :

[١] لنعرف أولاً عدد أبعاد قاعدة هذا الفضاء ويعطى بالدستور : $\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$

لدينا $n = 4 \Leftarrow$ $4 = \frac{4(3)(2)}{3 \times 2 \times 1}$

فتكون القاعدة :

$$\{(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3), (e_1 \wedge e_2 \wedge e_4), (e_1 \wedge e_3 \wedge e_4), (e_2 \wedge e_3 \wedge e_4)\}$$

[٢] قبل الحساب علينا تحويل M من جداء تناظري إلى ⊗ وذلك اعتماداً على الدستور :

$$M_1 \wedge M_2 = M_1 \otimes M_2 - M_2 \otimes M_1$$

ومنه نجد :

$$M = e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* = e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_3^* + e_2^* \otimes e_3^* \otimes e_1^* + e_3^* \otimes e_1^* \otimes e_2^*$$
$$- e_3^* \otimes e_2^* \otimes e_1^* - e_2^* \otimes e_1^* \otimes e_3^* - e_1^* \otimes e_3^* \otimes e_2^*$$

عندما تكون التبديلة زوجية ← موجب
عندما تكون التبديلة فردية ← سالب

الآن :

$$M(e_1 - e_2, e_3, e_2) = e_1^*(e_1 - e_2) \otimes e_2^*(e_3) \otimes e_3^*(e_2)$$
$$+ e_2^*(e_1 - e_2) \otimes e_3^*(e_3) \otimes e_1^*(e_2)$$
$$+ e_3^*(e_1 - e_2) \otimes e_1^*(e_3) \otimes e_2^*(e_2)$$
$$- e_3^*(e_1 - e_2) \otimes e_2^*(e_3) \otimes e_1^*(e_2)$$
$$- e_2^*(e_1 - e_2) \otimes e_1^*(e_3) \otimes e_3^*(e_2)$$
$$- e_1^*(e_1 - e_2) \otimes e_3^*(e_3) \otimes e_2^*(e_2)$$

$$= 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - (-1)(1)(1) = \boxed{-1}$$

[٣] عدد أبعاد الفضاء $E^{\vee 2}$ يعطى بالدستور : $\frac{n(n+1)}{2!}$

نعوض $n = 4$ فيكون $\frac{4(4+1)}{2 \times 1}$

$\Leftarrow$ عدد الأبعاد $= 10$

[٤] بنفس طريقة الطلب ② نحول $e_1 \vee e_2$ حسب الدستور : $M_1 \vee M_2 = M_1 \otimes M_2 + M_2 \otimes M_1$

$$\Rightarrow e_1 \vee e_2 = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$$

$$e_1 \vee e_2(e_2^*, e_1^*) = (e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1)(e_2^*, e_1^*)$$
$$= e_1 e_2^* \otimes e_2 e_1^* + e_2 e_2^* \otimes e_1 e_1^*$$
$$= 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = \boxed{1}$$

حل السؤال الثاني :

[1] إن متجه الموضع للنقطة المادية هو :

$$\vec r = x\,\vec i + y\,\vec j + z\,\vec k = \vec R + z\,\vec k$$

$$\Rightarrow d\vec r = dx\,\vec i + dy\,\vec j + dz\,\vec k = d\vec R + dz\,\vec k$$

$$\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = \dot x\,\vec i + \dot y\,\vec j + \dot z\,\vec k$$

لحساب تابع لاغرانج علينا حساب كل من الطاقة الحركية والطاقة الكامنة :

← الطاقة الحركية : تعطى بالدستور :

$$T = \frac{1}{2} m \vec v^2$$

$$= \frac{1}{2}(1)(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2)$$

$$\Leftarrow \quad T = \frac{1}{2}(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2)$$

← الطاقة الكامنة : من العلاقة :

$$\vec F = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

نضرب الطرفين بـ $d\vec r$:

$$\vec F \cdot d\vec r = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \cdot d\vec r$$

الآن نعوض بقيمة $\vec F$:

$$\Rightarrow F \cdot d\vec r = -dV$$

$$\Rightarrow -dV = \left[\frac{-\vec R}{R^3} + z\,\vec k\right] \cdot \left[d\vec R + dz\,\vec k\right]$$

$$= \frac{-\vec R \cdot d\vec R}{R^3} + z\,dz = \frac{-1}{R^2}\frac{\vec R}{R} d\vec R + z\,dz$$

$$= \frac{-dR}{R^2} + z\,dz$$

$$\Rightarrow -dV = d\left(\frac{1}{R}\right) + z\,dz = d\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2}z^2\right)$$

بالمكاملة نجد :

$$V = -\frac{1}{R} - \frac{1}{2}z^2$$

• دالة لاغرانج : $L = T - V$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) - \left(\frac{-1}{R} - \frac{1}{2}z^2\right)$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) + \frac{1}{R} + \frac{1}{2}z^2$$

• تحويل لوجندر : له الشكل : $q_n = \frac{\partial L}{\partial \dot p_n}$ حيث

$$\left.\begin{array}{ll} \dot p_1 = \dot x, & q_1 = X \\ \dot p_2 = \dot y, & q_2 = Y \\ \dot p_3 = \dot z, & q_3 = Z \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} X = \frac{\partial L}{\partial \dot x} = \dot x \\ Y = \frac{\partial L}{\partial \dot y} = \dot y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} X = \dot x \\ Y = \dot y \\ Z = \dot z \end{array}\right\}$$

٢ هاملتونيان المسألة يعطى بالدستور

$$H = \sum_{i=1}^{3} (q_i \dot{p}_i - L) \quad \text{و} \quad L(p, q)$$

$$= (X \cdot \dot{x} + Y \cdot \dot{y} + Z \cdot \dot{z} - L) \quad \text{و} \quad L(x, y, z, X, Y, Z)$$

$$= X \cdot X + Y \cdot Y + Z Z - \left[\frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{R} + \frac{Z^2}{2}\right]$$

$$= X^2 + Y^2 + Z^2 - \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) - \frac{1}{R} - \frac{1}{2} Z^2$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) - \frac{1}{R} - \frac{1}{2} Z^2$$

٥ معادلات هاملتون لها الشكل:

$$\dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k} \quad , \quad \dot{q}_k = \frac{-\partial H}{\partial p_k} \quad \text{حيث} \quad k = 1, 2, 3$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial X} = X \Rightarrow \dot{x} = X \quad \text{----} (1)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial Y} = Y \Rightarrow \dot{y} = Y \quad \text{----} (2)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial Z} = Z \Rightarrow \dot{z} = Z \quad \text{----} (3)$$

$$\dot{X} = \frac{-\partial H}{\partial x} = \frac{-x}{R^3} \Rightarrow \dot{X} = \frac{-x}{R^3} \quad \text{----} (4)$$

$$\dot{Y} = \frac{-\partial H}{\partial y} = \frac{-y}{R^3} \Rightarrow \dot{Y} = \frac{-y}{R^3} \quad \text{----} (5)$$

$$\dot{Z} = \frac{-\partial H}{\partial z} = \frac{-z}{R^3} \Rightarrow \dot{Z} = \frac{-z}{R^3} \quad \text{----} (6)$$

٧ لنثبت أنه: $H_1 = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) - \frac{1}{R}$ هو تكامل أولي

وحتى يكون H_1 هو تكامل أولي يجب أنه يحقق الشرط $\{H_1, H\} = 0$

$$\{H, H_1\} = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial X} - \frac{\partial H}{\partial X} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial Y} - \frac{\partial H}{\partial Y} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial y}$$

$$+ \frac{\partial H}{\partial z} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial Z} - \frac{\partial H}{\partial Z} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial z}$$

$$= \frac{x}{R^3} \cdot X - X \cdot \frac{x}{R^3} + \frac{y}{R^3} \cdot Y - Y \cdot \frac{y}{R^3} + 0(Z) - (0)(-Z)$$

$$= 0$$

إذن H_1 هو ثابتة تكاملية أولية.

أ

ب) نلاحظ أن :

$$H - H_1 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{1}{R} - \frac{1}{2}z^2 - \left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{R}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{R} - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{R}$$

$$= \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}z^2 = H_2$$

وبما أن كلاً من H و H_1 هو تكاملات أولية فإن فرق تكاملين أوليين هو تكامل أولي

إذاً نستنتج أن H_2 هو تكامل أولي ونقول :

$$\{H_2, H\} = \{H - H_1, H\} = \{H, H\} - \{H_1, H\} = 0 - 0 = 0$$

$\Leftarrow H_2$ تكامل أولي — $= 0$ كون H_1 تكامل أولي

[ج] حتى يكون التكاملان الأوليان H_1 ، H_2 متعارضان يجب أن يتحقق الشرط :

$$\{H_1, H_2\} = 0 \Rightarrow$$

$$\{H_1, H_2\} = \frac{\partial H_1}{\partial x}\frac{\partial H_2}{\partial X} - \frac{\partial H_1}{\partial X}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial y}\frac{\partial H_2}{\partial Y} - \frac{\partial H_1}{\partial Y}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial y}$$

$$+ \frac{\partial H_1}{\partial z}\frac{\partial H_2}{\partial Z} - \frac{\partial H_1}{\partial Z}\frac{\partial H_2}{\partial z}$$

$$= \frac{x}{R^3}(0) - X(0) + \frac{y}{R^3}(0) - Y(0) + (0)Z - (0)(z) = 0$$

$$\Rightarrow \{H_1, H_2\} = 0$$

$\Leftarrow H_1$ و H_2 تكاملان متعارضان .. ✓

<u>حل السؤال الثالث :</u>

1- صح

2- خطأ

3- خطأ

4-

تمنياتي بالتوفيق

مدرس المادة

[illegible]

٢٠٠٨

جامعة البعث	الميكانيك التحليلي	الاسم :
كلية العلوم	رابعة ميكانيك	الرقم :
قسم الرياضيات	حزيران ٠٨	

السؤال الأول : 20 = 5×4

ليكن الفضاء المتجهي E ، الثنائي البعد، والمزود بالقاعدة $\Omega_E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. لتكن $\Omega'_E = \{\vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}\}$ القاعدة الثنوية، الموافقة لـ Ω_E ، في الفضاء E' . المطلوب :

1. اعط قاعدة للفضاء $E \vee E$ ،
2. ما عدد أبعاد الفضاء $E \wedge E$ ،
3. احسب الجداء التقلصي $\vec{e}^{\,1} \wedge \vec{e}^{\,2} \cdot (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2)$ ،
4. ما هو الفضاء $E \wedge E \wedge E$.

السؤال الثاني : 40 = 10×4

تتحرك نقطة مادية، ذات كتلة واحدية، في جملة عطالية متعامدة ونظامية $Oxyz$ ، مزودة ترتيبا بمتجهات الواحدة $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ، وتخضع هذه النقطة لحقل القوى $\vec{F} = -\frac{\vec{r}}{r} - \vec{r}$ ، حيث $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ، $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. المطلوب :

1. اكتب تابع لاغرانج L ، واستنتج قيم المتحولات p_x, p_y, p_z ، المرافقة ترتيبا للمتحولات x, y, z ، بدلالة هذه المتحولات، ومشتقاتها
2. اعط هاملتوني المسألة H ، واكتب معادلات هاملتون،
3. لتكن الدالة $F = x(y - z) + y(z - x) + z(x - y)$ ، بين كونها او عدم كونها تكاملا اوليا،
4. احسب قيم أقواس بواسون التالية : $\{F, r^n\}, n = 1, 2, \ldots$

السؤال الثالث : 20 = 5×4

اجب بكلمة صح، او بكلمة خطأ فقط عن كل مما يلي،

1. عدد مضاريب لاغرانج، هو نفس عدد القيود،
2. كل الانتقالات الممكنة للنقطة المادية، غير المقيدة، تصلح لأن تكون افتراضية،
3. كل تكامل أولي يعارض تابع هملتون المرافق،
4. معادلات لاغرانج هي معادلات تفاضلية جزئية،

مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق

الدكتور: خالد العبدالله

{دورة الزيوان ٢٠٠٨}

حل السؤال الأول:

[١] أولاً علينا معرفة عدد أبعاد قاعدة هذا الفضاء من الدستور $\frac{n(n+1)}{2}$ ⇐ ثنائي البعد

$\frac{2(2+1)}{2} = 3$

⇐ $\{(e_1 \vee e_2), (e_1 \vee e_1), (e_2 \vee e_2)\}$ نصلح أنه تكون قاعدة لـ $E \vee E$

[٢] عدد أبعاد الفضاء $E \wedge E$ يعطى بالدستور $\frac{n(n-1)}{2}$

لدينا $n=2$ ⇐ $\frac{2(2-1)}{2} = 1$

[٣] لحساب الجداء التقلصي: $e_1^* \wedge e_2^*$. (e_1+2e_2)

علينا أولاً تحويل العبارة $e_1^* \wedge e_2^*$ اعتماداً على دستور التالي:

$$e_1^* \wedge e_2^* = e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*$$

$$(e_1+2e_2) \cdot e_1^* \wedge e_2^* = (e_1+2e_2)(e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*)$$

$$= e_1 e_1^* \otimes e_2^* - e_1 e_2^* \otimes e_1^* + 2e_2 e_1^* \otimes e_2^* - 2e_2 e_2^* \otimes e_1^*$$

$$= e_2^* - 2e_1^*$$

[٤] الفضاء $E \wedge E \wedge E$ هو الفضاء الصفري

ملاحظة من صهيب:

- بعد الفضاء $|E| = n$
- $|E \wedge E \wedge E| = m$ كما أنه بعد $\wedge^m E = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(m-1))}{m!}$

إذن: في حالة $n < m$ فهو الفضاء الصفري

$n = m$ ، متجه وحيد

في حالتنا كان لدينا $n=2$ ، $m=3$ أي $n < m$ ⇐ هو الفضاء الصفري

وعدد أبعاده $\frac{n(n-1)(n-2)}{m!} = \frac{2(2-1)(2-2)}{3!} = 0$

Soheb aswad

حل السؤال الثاني :

$$\vec{F} = -\frac{\vec{r}}{r} - \vec{r}$$

[1] إن متجه الموضع للنقطة المادية : $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{K}$

لحساب تابع لاغرانج يلزمنا :

• حساب الطاقة الحركية : $T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$; $m = 1$,

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

• حساب الطاقة الكامنة : نبحث عن دالة v بحيث :

$$\overrightarrow{\text{grad}\, v} = -\vec{F} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{d\vec{r}} = -\vec{F}$$

نضرب الطرفين بـ $d\vec{r}$ $\Leftarrow$ $d\vec{v} = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$= \left(\frac{\vec{r}}{r} + \vec{r}\right) d\vec{r}$$

$$= \frac{\vec{r}}{r} d\vec{r} + \vec{r}\, d\vec{r}$$

$$= \frac{\vec{r}}{r} d\vec{r}(1 + r)$$

$$\Rightarrow d\vec{v} = (1 + r)\, dr \Rightarrow v = \frac{1}{2}(1 + r)^2$$

• تابع لاغرانج : $L = T - V$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}(1 + r)^2 \quad ; r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

• تحويل لوجندر :

من العلاقة $q_i = \frac{\partial L}{\partial p_i}$; $\begin{cases} q_1 = X , & p_1 = \dot{x} \\ q_2 = Y , & p_2 = \dot{y} \\ q_3 = Z , & p_3 = \dot{z} \end{cases}$ $\Leftarrow$

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} \\ Y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} \\ Z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \dot{z} \end{aligned}\right\}$$

[2] هاملتونيان المسألة : $H = \left(\sum_{i=1}^{3} q_i p_i - L\right) \circ \mathcal{U}(p, q)$

$$= \left[X \cdot \dot{x} + Y \cdot \dot{y} + Z \cdot \dot{z} - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(1 + r)^2\right] \circ \mathcal{U}(x, y, z, X, Y, Z)$$

$$= X \cdot X + Y \cdot Y + Z \cdot Z - \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{2}(1 + r)^2$$

$$= (X^2 + Y^2 + Z^2) - \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{2}(1 + r)^2$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{2}(1 + r)^2$$

• معادلات هاملتون : من العلاقتين

$\dot{q}_x = \frac{-\partial H}{\partial p_x}$ ، $\dot{p}_x = \frac{\partial H}{\partial q_x}$ (x, y, z)

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial X} = X \Rightarrow \dot{x} - X = 0 \quad \dots (1)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial Y} = Y \Rightarrow \dot{y} - Y = 0 \quad \dots (2)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial Z} = Z \Rightarrow \dot{z} - Z = 0 \quad \dots (3)$$

$$\dot{X} = \frac{-\partial H}{\partial x} = x\left(\frac{1+r}{r}\right) \Rightarrow \dot{X} - x\left(\frac{1+r}{r}\right) = 0 \quad \dots (4)$$

$$\dot{Y} = \frac{-\partial H}{\partial y} = y\left(\frac{1+r}{r}\right) \Rightarrow \dot{Y} - y\left(\frac{1+r}{r}\right) = 0 \quad \dots (5)$$

$$\dot{Z} = \frac{-\partial H}{\partial z} = z\left(\frac{1+r}{r}\right) \Rightarrow \dot{Z} - z\left(\frac{1+r}{r}\right) = 0 \quad \dots (6)$$

[٢] حتى تكون الدالة F تكامل أولي يجب تحقق الشرط :

$$\{F, H\} = 0 \quad \Leftarrow$$

$$\{H, F\} = \frac{\partial H}{\partial X}\cdot\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial Y}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial Y} + \frac{\partial H}{\partial Z}\cdot\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial z}\cdot\frac{\partial F}{\partial Z}$$

$$= X(Y - Z) - \left(-x\left(\frac{1+r}{r}\right)\right)(-y + z)$$
$$+ Y(Z - X) - \left(-y\left(\frac{1+r}{r}\right)\right)(x - z)$$
$$+ Z(X - Y) - \left(-z\left(\frac{1+r}{r}\right)\right)(-x + y)$$

$$= XY - XZ + YZ - XY + XZ - YZ$$
$$- \left(\frac{1+r}{r}\right)\left[-xy + xz + xy - yz - xz + yz\right]$$

$$= 0 - 0 + 0 - \left(\frac{1+r}{r}\right)\left[0 + \dots + 0\right] = 0$$

الشرط محقق .. ⇐ F تكامل أولي

next
التالي ← أقواس بواسون

sokeby7@yahoo.com

٤ حساب أقواس بواسون $\{F, r^n\}$; $n=1,2,\dots$

○ عندما $n=1$ يكون: $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ⇐

$$\{F,r\} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial r}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}$$

$$= (y+z)(0) - (-y+z)\left(\frac{x}{r}\right) + (z-x)(0) - (x-z)\left(\frac{y}{r}\right) + (x-y)(0) - (-x+y)\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$= 0+0+\frac{1}{r}\left[+xy+xz-xy+yz+xz-yz\right] = 0$$

⇐ عندما $n=1$ يكون $\{F,r\}=0$

○ عندما $n=2$ يكون: $r^2=x^2+y^2+z^2$ ⇐

$$\{F,r^2\} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial r^2}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial r^2}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial r^2}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial r^2}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial r^2}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial r^2}{\partial z}$$

$$= (y-z)(0) - (-y+z)(2x) + (z-x)(0) - (x-z)(2y) + (x-y)(0) - (-x+y)(2z)$$

$$= +2xy - 2xz - 2xy + 2yz + 2xz - 2yz$$

$$= 0$$

باستمرار نجد أنه:

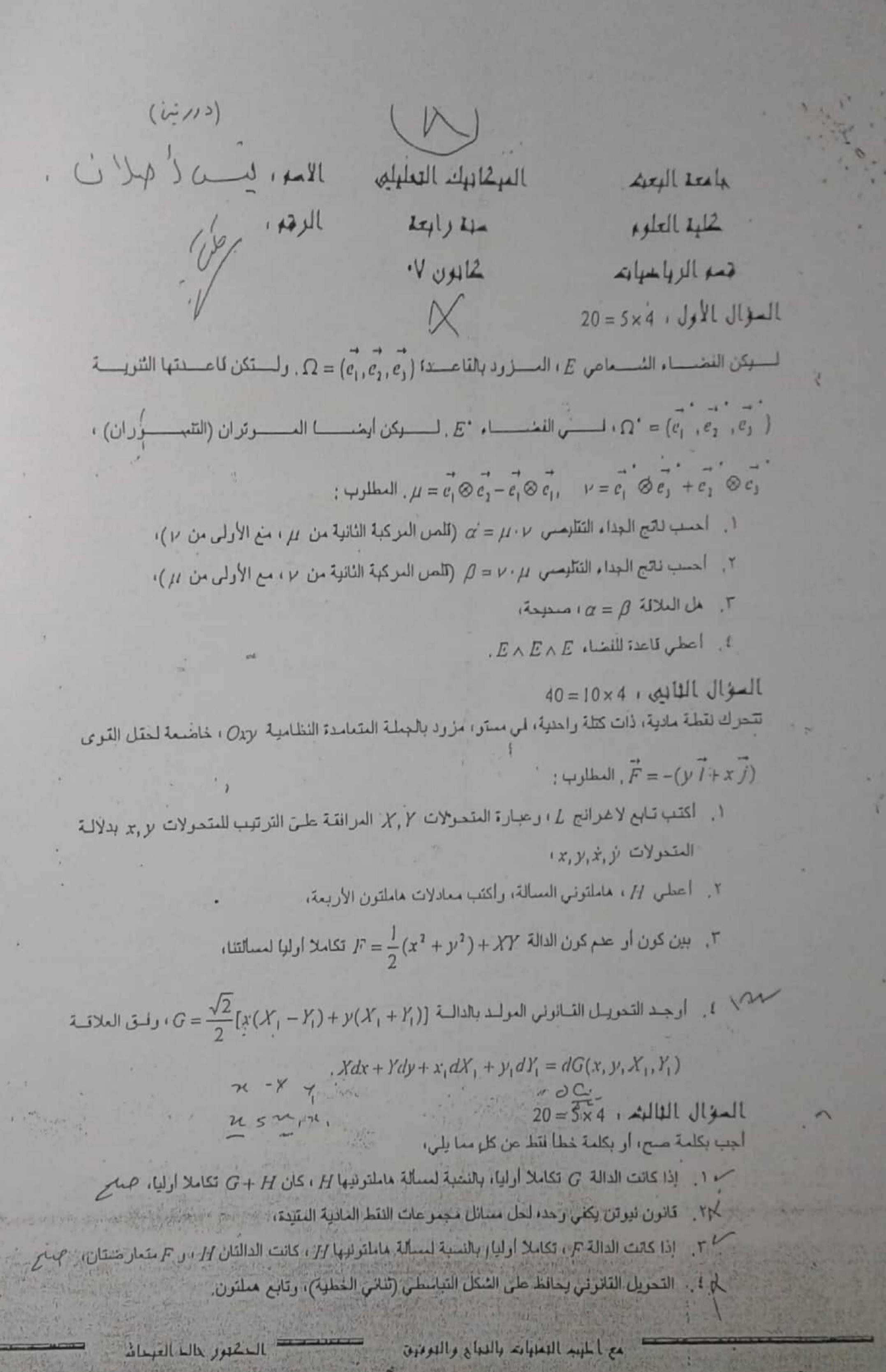
أقواس بواسون $\{F, r^n\} = 0 \quad \forall n$

حل السؤال الثالث

١. ٢- خطأ ٣- صح ٤- صح

تمت بعونه

أبو تمام



جامعة البعث | الميكانيك التحليلي | الاسم :
كلية العلوم | سنة رابعة | الرقم :
قسم الرياضيات | كانون ٠٧

السؤال الأول : $20 = 5 \times 4$

ليكن الفضاء الشعاعي E ، المزود بالقاعدة $\Omega = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. ولتكن قاعدتها الثنوية $\Omega^* = (\vec{e}_1^{\,*}, \vec{e}_2^{\,*}, \vec{e}_3^{\,*})$ ، للفضاء E^* . ليكن أيضا الموتران (التنسوران) ، $\mu = \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 - \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1$ ، $\nu = \vec{e}_1^{\,*} \otimes \vec{e}_3^{\,*} + \vec{e}_2^{\,*} \otimes \vec{e}_3^{\,*}$. المطلوب :

١. احسب ناتج الجداء التقلصي $\alpha = \mu \cdot \nu$ (قلص المركبة الثانية من μ ، مع الأولى من ν)،
٢. احسب ناتج الجداء التقلصي $\beta = \nu \cdot \mu$ (قلص المركبة الثانية من ν ، مع الأولى من μ)،
٣. هل العلاقة $\alpha = \beta$ ، صحيحة،
٤. أعطي قاعدة للفضاء $E \wedge E \wedge E$.

السؤال الثاني : $40 = 10 \times 4$

تتحرك نقطة مادية، ذات كتلة واحدية، في مستو، مزود بالجملة المتعامدة النظامية Oxy ، خاضعة لحقل القوى $\vec{F} = -(y\,\vec{i} + x\,\vec{j})$. المطلوب :

١. اكتب تابع لاغرانج L ، وعبارة المتحولات X, Y المرافقة على الترتيب للمتحولات x, y بدلالة المتحولات $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ ،
٢. أعطي H ، هاملتوني المسألة، واكتب معادلات هاملتون الأربعة،
٣. بين كون أو عدم كون الدالة $F = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + XY$ تكاملا أوليا لمسألتنا،
٤. أوجد التحويل القانوني المولد بالدالة $G = \frac{\sqrt{2}}{2}[x(X_1 - Y_1) + y(X_1 + Y_1)]$ ، وفق العلاقة $Xdx + Ydy + x_1 dX_1 + y_1 dY_1 = dG(x, y, X_1, Y_1)$.

السؤال الثالث : $20 = 5 \times 4$

أجب بكلمة صح، أو بكلمة خطأ فقط عن كل مما يلي،

١. إذا كانت الدالة G تكاملا أوليا، بالنسبة لمسألة هاملتونيها H ، كان $G + H$ تكاملا أوليا،
٢. قانون نيوتن يكفي وحده لحل مسائل مجموعات النقط المادية المقيدة،
٣. إذا كانت الدالة F ، تكاملا أوليا بالنسبة لمسألة هاملتونيها H ، كانت الدالتان H ، و F متعارضتان،
٤. التحويل القانوني يحافظ على الشكل التباسطي (ثنائي الخطية)، وتابع هملتون.

مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق — الدكتور خالد العبدالله

فصل أول

٢٠٠٧

السؤال الأول :

$$\alpha = \mu \cdot \nu = (\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 - \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1) \cdot (\vec{e}^{*}_1 \otimes \vec{e}^{*}_3 + \vec{e}^{*}_2 \otimes \vec{e}^{*}_3) =$$

$$= \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 \cdot \vec{e}^{*}_1 \otimes \vec{e}^{*}_3 + \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 \cdot \vec{e}^{*}_2 \otimes \vec{e}^{*}_3 - \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 \cdot \vec{e}^{*}_2 \otimes \vec{e}^{*}_3 - \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 \cdot \vec{e}^{*}_1 \otimes \vec{e}^{*}_3$$

$$= \vec{e}_1 \otimes \vec{e}^{*}_3 - \vec{e}_1 \otimes \vec{e}^{*}_3 = 0$$

$$\beta = \nu \cdot \mu = 0$$

ملاحظة

تعليق الدكتور بين قوسين مؤشر لعلية التقليص

$\beta \in E^{*} \otimes E$ ، $\alpha \in E \otimes E^{*}$

العلاقة $\alpha = \beta$ ليست صحيحة لأن $\alpha = \beta = 0$ لكنها

لاختلاف الفضاءات

أي أن كل منهما من فضاء

$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$ هي قاعدة لـ $E \wedge E \wedge E$

السؤال الثاني :

معادلات النقطة المادية تتحرك في مستوٍ ناظمياً بما هي (x, y) نقطة

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ شعاع موضع ، $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ سرعة

$\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j}$ ، $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j}$

$L = T - V$

حساب تابع لاغرانج

حساب الطاقة الحركية

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)$$

حساب الطاقة الكامنة

$$\vec{F} = -\text{grad}\, V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(y\vec{i} + x\vec{j}) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}\right) \Rightarrow y\vec{i} + x\vec{j} = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}$$

$\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} = 0$

نضرب الطرفين بـ $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$ نجد

$$y\,dx + x\,dy = dV \Rightarrow d(x \cdot y) = dV \Rightarrow$$

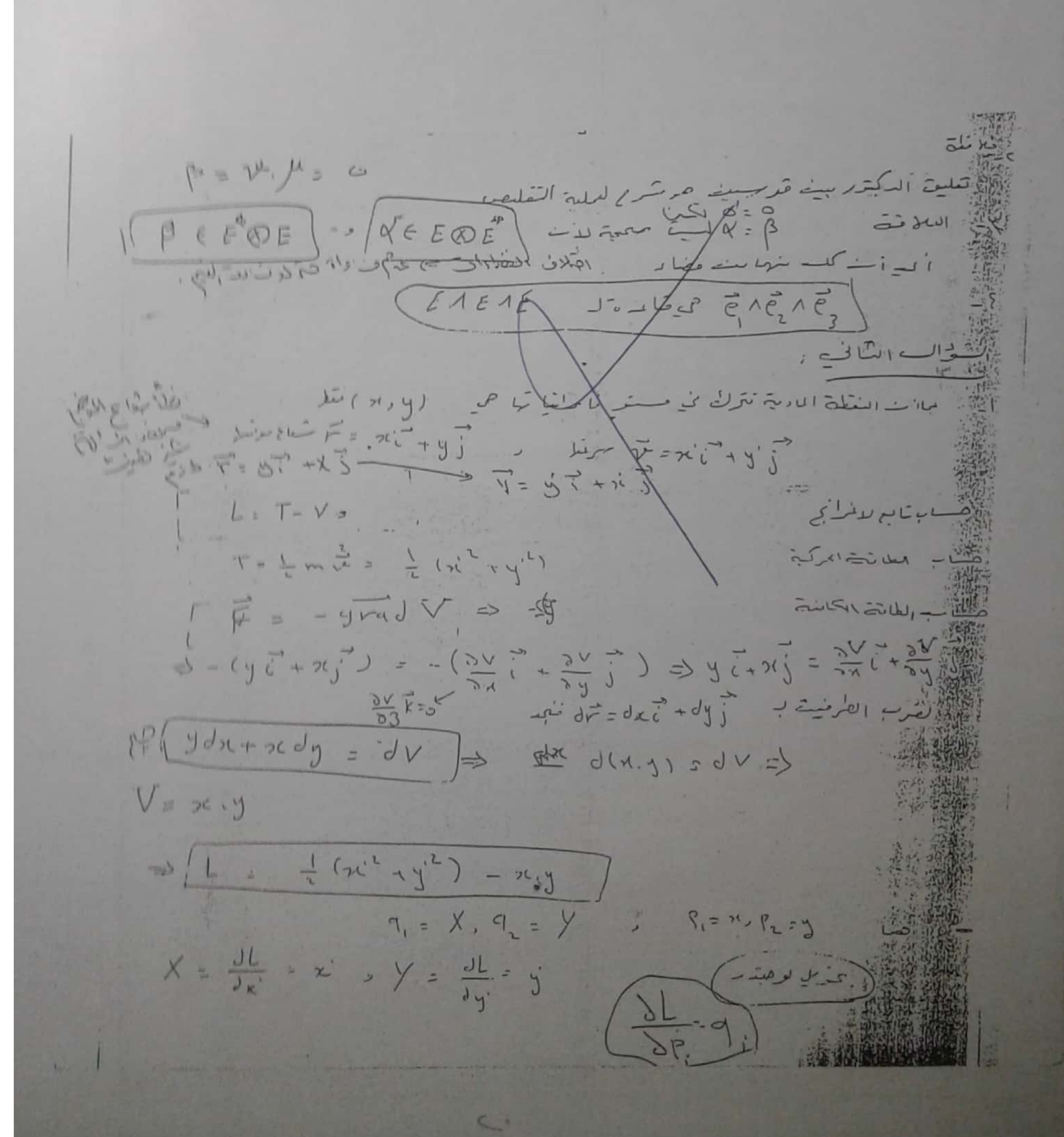
$$V = x \cdot y$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - x \cdot y$$

$q_1 = X,\ q_2 = Y$ ، $p_1 = x,\ p_2 = y$

$$X = \frac{\partial L}{\partial x'} = x' \ ,\ Y = \frac{\partial L}{\partial y'} = y'$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_i} = q_i$$



السؤال الثاني :

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$

حساب تابع لاغرانج

$L = T - V$

حساب الطاقة الحركية

$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)$

حساب الطاقة الكامنة

$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, V$

$-(y\vec{i} + x\vec{j}) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}\right) \Rightarrow y\vec{i} + x\vec{j} = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}$

$\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} = 0$

$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$

$y\,dx + x\,dy = dV \Rightarrow d(x.y) = dV \Rightarrow$

$V = x.y$

$\Rightarrow L = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - x.y$

$q_1 = X,\ q_2 = Y$; $P_1 = x,\ P_2 = y$

$X = \frac{\partial L}{\partial x'} = x'$, $Y = \frac{\partial L}{\partial y'} = y'$

$\frac{\partial L}{\partial P_i} = q_i$

ح٣

$$H = \left(\sum_{i=1}^{2} \dot{p}_i q_i - L\right) \circ \varphi(x, y, X, Y)$$

$$H = (\dot{p}_1 q_1 + \dot{p}_2 q_2 - L) \circ \varphi(x, y, X, Y)$$

$$H = \left[\dot{x} X + \dot{y} Y - \left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - xy\right)\right] \circ \varphi$$

$$= X^2 + Y^2 - \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) + xy$$

$$H = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) + xy$$

معادلات هاملتون الأربعة

$$\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2)$$

نأخذ $\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}$

$$i = 1 \Rightarrow \dot{p}_1 = \frac{\partial H}{\partial q_1} \Rightarrow \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial X} = X \Rightarrow X = \dot{x}$$

$$i = 2 \Rightarrow \quad \Rightarrow Y = \dot{y}$$

(٭)

نأخذ $\dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i}$

$$i = 1 \Rightarrow \dot{q}_1 = -\frac{\partial H}{\partial p_1} \Rightarrow \dot{X} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -y \Rightarrow \dot{X} + y = 0$$

$$i = 2 \Rightarrow \quad \Rightarrow \dot{Y} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -x \Rightarrow \dot{Y} + x = 0$$

(٭٭)

(٭) و (٭٭) هي معادلات هاملتون الأربعة المطلوبة.

حتى يكون F تكاملاً أولياً لهذه المسألة يجب أن يحقق الشرط $\{H, F\} = 0$

$$\{H, F\} = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial Y} - \frac{\partial H}{\partial X} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial Y} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$= y \cdot Y + x X - X x - Y \cdot y = 0$$

وبالتالي يكون F تكاملاً أولياً

$G = \frac{\sqrt{2}}{2}[x(X_1 - Y_1) + y(X_1 + Y_1)]$ دفتر الدراسة

هو التحويل القانوني المولد بالدالة

$$X dx + Y dy + x_1 dX_1 + y_1 dY_1 = dG(x, y, X_1, Y_1) =$$

بالمطابقة

$$= \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy + \frac{\partial G}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial G}{\partial Y_1} dY_1$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(X_1 - Y_1) dx + \frac{\sqrt{2}}{2}(X_1 + Y_1) dy + \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) dX_1$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2}(y - x) dY_1$$

بالمطابقة نجد أن:

س ٣

$X = \frac{\sqrt{2}}{2}(X_1 - Y_1)$ (1)

$Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X_1 + Y_1)$ (2)

$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$ (3)

$y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(y - x)$ (4)

بجمع (3) و (4) نحصل على

$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + y_1)$ (5)

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - y_1)$ (6)

هما التحويل القانوني المطلوب

x, y, X, Y

(1) و (2) و (5) و (6) هي التحويلات القانونية المطلوبة.

ملاحظة: أرجو التأكد من هذا الحل من قبل الدكتور

السؤال الثالث:

[1] صح لأن $\{G + H^e, H\} = \{G, H\} + \{H, H\} = \{G, H\}$

" لأن الأقواس تساوي صفراً "

[2] خطأ

[3] صح لأن F ثابت الحركة أولي يعني الشرط التالي يتحقق $\{H, F\}$

ويتحقق هذا الشرط يعني أن الدالتين F, H متبادلتان

[4] خطأ لأنه لا يحافظ على صيغ هاملتون.

جامعة الرشيد
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الميكانيك التحليلي
السنة الرابعة
حزيران 07

الاسم :
الرقم :

السؤال الأول : $20 = 5 \times 4$

ليكن الفضاء المتجهي E ، المزود بالقاعدة $\Omega_E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ، ولتكن قاعدتها الثنوية $\Omega_E^* = \{\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*\}$ ، في الفضاء E^* . لتكن أيضاً الفضاء المتجهي F ، المزود بالقاعدة $\Omega_F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ ، ولتكن قاعدتها الثنوية $\Omega_F^* = \{\vec{f}_1^*, \vec{f}_2^*, \vec{f}_3^*\}$ ، في الفضاء F^* . لتكن أيضاً الموتران (التنزوران) ، $\nu = \vec{e}_1^* \otimes \vec{f}_1 - \vec{e}_2^* \otimes \vec{f}_3$ ، $\mu = \vec{f}_1 \otimes \vec{e}_2$. المطلوب :

1. احسب ناتج الجداء التقليصي $\alpha = \mu \cdot \nu$ (تقلص المركبة الثانية من μ ، مع الأولى من ν)،
2. احسب ناتج الجداء التقليصي $\beta = \vec{f}_2^* \cdot \alpha$ ،
3. إلى أي فضاء ينتمي المقدار β ،
4. اعط قاعدة للفضاء $F \otimes E^*$.

السؤال الثاني : $40 = 10 \times 4$

تتحرك نقطة مادية، ذات كتلة واحدية، في جملة عطالية متعامدة ونظامية $Oxyz$ ، وتخضع لحقل القوى $\vec{F} = r\,\vec{r}$ ، حيث $\vec{r}$ هو متجه الموضع، و $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. المطلوب :

1. اكتب تابع لاغرانج L ، واعطي العلاقات التي تعرف المتحولات X, Y, Z المرافقة ترتيبا للمتحولات x, y, z ،
2. احسب $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ، بدلالة المتحولات x, y, z ، ومرافقتها، ثم اعطي هاملتوني المسألة H ،
3. بين كون أو عدم كون الدالة $F = xY - Xy$ تكاملا أوليا لمسألتنا،
4. بين تعارض أو عدم تعارض التكاملان الأوليان $G_1 = zX - Zx,\quad G_2 = yZ - Yz$.

السؤال الثالث : $20 = 5 \times 4$

أجب بكلمة صح، أو بكلمة خطأ فقط عن كل مما يلي:

1. الدوال المولدة للتحويلات القانونية، هي تكاملات أولية بالضرورة،
2. جداء تكاملان أوليان هو تكامل أولي،
3. الدالة H^2 ، تكاملا أوليا، بالنسبة لمسألة هاملتونيها H ،
4. تابع لاغرانج ثابتة، بمرور الزمن (أثناء الحركة).

مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق

الدكتور خالد الشحادة

حل

حل السؤال الأول:

أ) لدينا:

$\circ\ M = f_1 \otimes e_2$

$\circ\ U = e_1^* \otimes f_1 - e_2^* \otimes f_3$

$\Rightarrow \alpha = M \cdot U = (f_1 \otimes e_2)(e_1^* \otimes f_1 - e_2^* \otimes f_3)$

$= f_1 \otimes \underbrace{e_2 \cdot e_1^*}_{0} \otimes f_1 - f_1 \otimes \underbrace{e_2 \cdot e_2^*}_{1} \otimes f_3$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = -f_1 \otimes f_3}$

ب) حساب β:

$\circ\ \beta = f_2^* \cdot \alpha$

$= f_2^* \cdot (-f_1 \otimes f_3) = -\underbrace{f_2^* \cdot f_1}_{0} \otimes f_3 = 0$

$\Rightarrow \boxed{\beta = 0}$

ج) من العلاقة السابقة: $\beta = f_2^* \cdot (-f_1 \otimes f_3)$

$\Rightarrow \beta \in -f_2^* \cdot f_1 \otimes f_3$

$\beta \in F^* \cdot F \otimes F = F$

$\Rightarrow \boxed{\beta \in \vec{F}}$

د) إن عدد أبعاد هذه القاعدة = i × j = ٣ × ٢ = ٦

⇐ $\{ f_i \otimes e_j^* \ ;\ i = 1,2,3 \ ;\ j = 1,2 \}$ قاعدة للفضاء التنسوري $F \otimes E^*$

حل السؤال الثاني: $\vec{F} = r \cdot \vec{r}$

١) شعاع الموضع للنقطة المادية (m=1): $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

• لحساب تابع لاغرانج يلزمنا:

الطاقة الحركية: $T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \Leftarrow T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

الطاقة الكامنة: بما أن دالة ... $\overrightarrow{grad}\,V = -\vec{F}$

$\frac{dV}{d\vec{r}} = -\vec{F} \Rightarrow dV = -\vec{F}\, d\vec{r}$

$= -r\,\vec{r}\, d\vec{r}$

$= -r^2 \frac{\vec{r}}{r}\, d\vec{r}$

$\Rightarrow dV = -r^2 \cdot dr$

$V = -\frac{1}{3} r^3 \Leftarrow$

○ دالة لاغرانج : $L = T - V$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{3}r^3 \quad ; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

○ تحويل ليجندر :

من الدستور $\quad \dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i} \quad$ حيث

$q_1 = X$, $q_2 = Y$, $q_3 = Z$ & $p_1 = \dot{x}$, $p_2 = \dot{y}$, $p_3 = \dot{z}$

$$\Rightarrow X = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x}$$
$$Y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y}$$
$$Z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \dot{z}$$

٢ هاملتوني المسألة :

$$H = \left(\sum_{i=1}^{3} q_i \dot{p}_i - L\right) \circ f(p, q)$$

$$\Rightarrow H = \left[X \cdot \dot{x} + Y \cdot \dot{y} + Z \cdot \dot{z} - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{3}r^3\right] \circ f(x, y, z, X, Y, Z)$$

$$= (X^2 + Y^2 + Z^2) - \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) - \frac{1}{3}r^3$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) - \frac{1}{3}r^3$$

○ معادلات هاملتون :

من الدساتير : $\quad \dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k} \quad ; \quad \dot{q}_k = \frac{-\partial H}{\partial p_k} \quad k = 1, 2, 3 \quad$ نعوض :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial X} = X \Rightarrow \dot{x} - X = 0 \quad \text{---- (1)}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial Y} = Y \Rightarrow \dot{y} - Y = 0 \quad \text{---- (2)}$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial Z} = Z \Rightarrow \dot{z} - Z = 0 \quad \text{---- (3)}$$

$$\dot{X} = \frac{-\partial H}{\partial x} = x r^2 \Rightarrow \dot{X} - x r^2 = 0 \quad \text{---- (4)}$$

$$\dot{Y} = \frac{-\partial H}{\partial y} = y r^2 \Rightarrow \dot{Y} - y r^2 = 0 \quad \text{---- (5)}$$

$$\dot{Z} = \frac{-\partial H}{\partial z} = z r^2 \Rightarrow \dot{Z} - z r^2 = 0 \quad \text{---- (6)}$$

وهي معادلات هاملتون المستقرة

○ توضيح من (١)

$$\frac{-\partial H}{\partial x} = \left(\frac{1}{3}r^3\right)' = \left[\frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}\right]'$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2} - 1} \cdot (2x)$$
$$= x r^2$$

Soheb

[٣] حتى تكون الدالة F تكامل أولي يجب أن يتحقق الشرط $\{H, F\} = 0$:

$$\{H, F\} = \frac{\partial H}{\partial X} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial Y} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial Y} + \frac{\partial H}{\partial Z} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial Z}$$

$$= (x)(Y) - (-xr^2)(-y) + (Y)(-X) - (-yr^2)(x) + (Z)(0) - (-zr^2)(0)$$

$$= xY - xyr^2 - XY + xyr^2 + 0 - 0 = 0$$

الشرط محقق ⇐ الدالة F تكامل أولي لمسألتنا ..

[٤] حتى تكون التكاملات الأولية متعارضة يجب تحقق الشرط : $\{G_1, G_2\} = 0$:

$$\{G_1, G_2\} = \frac{\partial G_1}{\partial X} \cdot \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial G_2}{\partial X} + \frac{\partial G_1}{\partial Y} \cdot \frac{\partial G_2}{\partial y} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial G_2}{\partial Y} + \frac{\partial G_1}{\partial Z} \cdot \frac{\partial G_2}{\partial z} - \frac{\partial G_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial G_2}{\partial Z}$$

$$= (z)(0) - (-z)(0) + (0)(\ ) - (0)(\ ) + (-x)(-Y) - (X)(y)$$

$$= 0 - 0 + 0 + xY - yX = xY - yX = F$$

بما أن $\{G_1, G_2\} = F \neq 0$ ⇐ غير متعارضة .. كلا

[٥] ما في طلب ٥ ..

حل السؤال الثالث :

١. خطأ

٢. صح

٣. صح

٤. خطأ

والله الموفق.

[illegible]

جامعة البعث — الميكانيك التحليلي — الاسم:

كلية العلوم — سنة رابعة — الرقم:

قسم الرياضيات — حزيران 06

السؤال الأول: $20 = 5 \times 4$

ليكن الفضاء الشعاعي E، المزود بالقاعدة $\Omega_1 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. ولتكن قاعدتها الثنوية $\Omega^* = (\vec{e}_1^{\,*}, \vec{e}_2^{\,*}, \vec{e}_3^{\,*})$ في الفضاء E^*. ليكن أيضاً المؤثر (التنسور)، $\mu = \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1^{\,*} + 2\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3^{\,*} - 2\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2^{\,*} + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3^{\,*}$. المطلوب:

1. احسب α، ناتج تقليص المركبة الأولى مع الثانية في عبارة μ،
2. لتكن القاعدة $\sigma = (\vec{f}_1 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{f}_2 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{f}_3 = \vec{e}_2)$ للفضاء E، احسب عبارة μ بدلالة عناصر القاعدة σ، وعناصر قاعدتها الثنوية σ^*،
3. احسب β، ناتج تقليص المركبة الأولى مع الثانية في عبارة μ الجديدة،
4. علل تساوي أو اختلاف المقدارين α، β.

السؤال الثاني: $40 = 10 \times 4$

تتحرك نقطة مادية، ذات كتلة واحدية، في جملة متعامدة نظامية $Oxyz$، خاضعة لحقل القوى $\vec{F} = -\dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{x^2 + y^2 + z^2}$، المطلوب:

1. اكتب تابع لاغرانج L، وعبارة المتحولات X, Y, Z المرافقة على الترتيب للمتحولات x, y, z بدلالة المتحولات $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$،
2. أعطي H، هاملتوني المسألة، واكتب معادلات هاملتون للمسألة،
3. احسب $L_{\vec{Z}_H} H_1$ مشتق لي للدالة $H_1 = yZ - zY$ وفق حقل الدالة H،
4. ليكن التكاملين الأوليين $H_2 = zX - xZ$، $H_3 = xY - yX$. احسب المقادير (H_1, H_2)، (H_2, H_3)، (H_3, H_1)، بدلالة H_1، H_2، H_3.

السؤال الثالث: $20 = 5 \times 4$

أجب بكلمة صح، أو بكلمة خطأ فقط عن كل مما يلي:

1. إذا لم يظهر أحد المتحولات في تابع هاملتون كان متحوله المرافق تكاملاً أولياً،
2. معادلات هملتون ذات الرتبة الأولى هي تكاملات لمعادلات لاغرانج، ذات الرتبة الثانية،
3. تكون الدالة F، تكاملاً أولياً لحقل الدالة H، إذا وفقط إذا كانت الدالة H، تكاملاً أولياً لحقل الدالة F،
4. إذا كان عدد أبعاد الفضاء المتجهي E هو n، كان عدد أبعاد الفضاء $E \wedge E$ هو $\dfrac{n(n-1)}{2}$

مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق

الدكتور خالد المرحاك

تحليل

(دورة حزيران ٢٠١٦)

حل السؤال الأول:

1

$M = e_1 \otimes e_1^* + 2e_1 \otimes e_2^* - 2e_2 \otimes e_2^* + e_3 \otimes e_3^*$

المركبة الأولى في الثانية — 2×1 — 2×2 — 3×3

$\Rightarrow \alpha = 1 + 2(0) - 2(1) + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$

2

$\{ f_1 = -e_1 + e_2 + e_3 ,\ f_2 = e_3 ,\ f_3 = e_2 \}$

$\vec{f_i} = A \cdot \vec{e_i} \quad ; i = 1,2,3 \quad ; A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

أي أننا كتبنا الجملة بالشكل:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

والمطلوب هو كتابة عناصر M بدلالة عناصر القاعدة f وعناصر القاعدة الثنوية f^*:

- $f_i = A \cdot e_i \Rightarrow e_i = A^{-1} f_i$
- $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A} \quad ; \tilde{A}$: نستخدم طريقة المتممات الجبرية
- $|A| = -1 \quad ; A_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$ بالتعويض $\rightarrow$

$A_{11} = -1 \quad A_{12} = 0 \quad A_{13} = 0$

$A_{21} = 0 \quad A_{22} = 0 \quad A_{23} = 1$

$A_{31} = 2 \quad A_{32} = -1 \quad A_{33} = -1$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = -f_1 - f_2 + 2f_3 \\ e_2 = f_3 \\ e_3 = -f_2 + f_3 \end{cases}$$

عناصر M بدلالة f

لكتابة عناصر M بدلالة f^* نضع: $e^* = B \cdot f^*$

حيث $B = (C^T)^{-1}$

بنفس الطريقة نحسب $(C^T)^{-1}$ نجد أنه:

$$B = (C^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} e_1^* \\ e_2^* \\ e_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^* \\ f_2^* \\ f_3^* \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} e_1^* = -f_1^* \\ e_2^* = f_1^* + f_2^* + f_3^* \\ e_3^* = f_1^* - f_2^* \end{cases}$$

عناصر M بدلالة f^*

٣ | لحساب β علينا ايجاد عبارة M الجديدة:

$$M = e_1 \otimes e_1^* + 2 e_1 \otimes e_2^* - 2 e_2 \otimes e_3^* + e_3 \otimes e_1^*$$

أولاً لنحسب المقادير بالمركبات الجديدة:

$$\text{١} \; e_1 \otimes e_2^* = [-f_1 - f_2 + 2f_3] \otimes [-f_1^*] = f_1 \otimes f_1^* + f_2 \otimes f_1^* - 2 f_3 \otimes f_1^*$$

$$\text{٢} \; -2 e_2 \otimes e_3^* = \left[-2 f_3 \otimes (f_1^* + f_2^* + f_3^*)\right] = -2 f_3 \otimes f_1^* - 2 f_3 \otimes f_2^* - 2 f_3 \otimes f_3^*$$

$$\text{٣} \; e_3 \otimes e_1^* = \left[(-f_2 + f_3) \otimes (f_1^* - f_2^*)\right] = -f_2 \otimes f_1^* + f_2 \otimes f_2^* + f_3 \otimes f_1^* - f_3 \otimes f_2^*$$

وبالاستفادة من ١ نجد: $2 e_1 \otimes e_2^*$

بالحساب

$$\text{٣} \; e_1 \otimes e_1^* + 2 e_1 \otimes e_2^* = e_1 \otimes (e_1^* + 2 e_2^*)$$
$$= f_1 \otimes f_1^* - 2 f_1 \otimes f_2^* - 2 f_1 \otimes f_3^* - f_2 \otimes f_1^* - 2 f_2 \otimes f_2^*$$
$$- 2 f_2 \otimes f_1^* + 2 f_3 \otimes f_1^* + 4 f_3 \otimes f_2^* + 4 f_3 \otimes f_3^*$$

الآن نجمع العلاقات ١، ٢، ٣ نحصل على عبارة M الجديدة:

$$M = -f_1 \otimes f_1^* - 2 f_1 \otimes f_2^* - 2 f_1 \otimes f_3^* - 2 f_2 \otimes f_1^* + f_2 \otimes f_2^* - 2 f_2 \otimes f_3^*$$
$$+ f_3 \otimes f_1^* + f_3 \otimes f_2^* + 2 f_3 \otimes f_3^*$$

الآن لنحسب β نأخذ معاملات المركبة الأولى مع المركبة الثانية في عبارة M (كما في الطلب الأول)!

$$\Rightarrow \beta = -1 + 0 + 0 + 0 - 1 + 0 + 0 + 0 + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$$

٤ | إن $\alpha \neq \beta$ وذلك لأن:

$$\alpha \in E \otimes E^*$$
$$\beta \in F \otimes F^*$$

أي أنه لا يمكن أن يتساويا...

by:
t.soheb-ad@hotmail.com
Soheb

حل السؤال الثاني:

$$F = - \frac{\quad}{x^2 + y^2 + z^2}$$

[1] نبرهن أنه شعاع الموضع للنقطة المادية (نأخذ $m=1$):

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

وشعاع السرعة:

$$\vec{v} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k}$$

- دالة لاغرانج تعطى بالدستور $L = T - V$
- حساب الطاقة الحركية: $T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$
- حساب الطاقة الكامنة: نبحث عن دالة V بحيث $\overrightarrow{grad}\, V = -\vec{F}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{grad}\, V = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

نضرب الطرفين داخلياً بـ $d\vec{r}$ نجد:

$$dV = \frac{1}{r}\, dr$$

بالتكامل:

$$V = \ln r$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \ln r$$

- تحويل لوجندر: $q_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_k}$

حيث $p_1 = x \quad p_2 = y \quad p_3 = z$ ، $q_1 = X \quad q_2 = Y \quad q_3 = Z$ نعوض:

$$\begin{cases} X = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} \\ Y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} \\ Z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \dot{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X - \dot{x} = 0 \\ Y - \dot{y} = 0 \\ Z - \dot{z} = 0 \end{cases}$$

[2] هاملتونية المسألة لها الدستور:

$$H = \left(\sum_{i=1}^{n} \dot{p}_k q_k - L\right) \circ \ell$$

$$H = (\dot{p}_1 q_1 + \dot{p}_2 q_2 + \dot{p}_3 q_3 - L) \circ (\dot{x} = X, \dot{y} = Y, \dot{z} = Z)$$

$$= (\dot{p}_1 q_1 + \dot{p}_2 q_2 + \dot{p}_3 q_3) - L$$

$$= (X^2 + Y^2 + Z^2) - \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \ln r$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \ln r$$

- معادلات هاملتون:

$$\dot{q}_k = \frac{-\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k}$$

$$\dot{X} = \frac{-\partial H}{\partial x} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{-x}{r^2} \quad (1)$$

$$\dot{Y} = \frac{-\partial H}{\partial y} = \frac{-y}{r^2} \quad (2)$$

$$\dot{Z} = \frac{-\partial H}{\partial z} = \frac{-z}{r^2} \quad (3)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial X} = X \Rightarrow \dot{x} = X \quad (4)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial Y} = Y \Rightarrow \dot{y} = Y \quad (5)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial Z} = Z \Rightarrow \dot{z} = Z \quad (6)$$

[٣]

$$\begin{cases} H = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) - \ln r \\ H_1 = yZ - zY \end{cases}$$

$$L_{\vec{X}_H} H_1 = \{H_1, H\} = \frac{\partial H_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial H}{\partial X} - \frac{\partial H_1}{\partial X}\cdot\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial H}{\partial Y} - \frac{\partial H_1}{\partial Y}\cdot\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial H}{\partial Z} - \frac{\partial H_1}{\partial Z}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}$$

$$= (0-0) + \left(Z\cdot Y + z\frac{y}{r^2}\right) + \left(-YZ - y\cdot\frac{z}{r^2}\right) = ZY + zy\frac{1}{r^2} - ZY - zy\frac{1}{r^2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{L_{\vec{X}_H} H_1 = 0}$$

[٤]

$$\begin{cases} H_2 = zX - xZ \\ H_3 = xY - yX \end{cases}$$

- $$\{H_1, H_2\} = \frac{\partial H_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial X} - \frac{\partial H_1}{\partial X}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial Y} - \frac{\partial H_1}{\partial Y}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial H_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial Z} - \frac{\partial H_1}{\partial Z}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial z}$$

$$= (0-0) + (Z\cdot 0 + Z\cdot 0) + (+Yx - yX) = xY - yX \Rightarrow = H_3$$

$$\{H_1, H_2\} = H_3$$

- $$\{H_2, H_3\} = \frac{\partial H_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial H_3}{\partial X} - \frac{\partial H_2}{\partial X}\cdot\frac{\partial H_3}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y}\cdot\frac{\partial H_3}{\partial Y} - \frac{\partial H_2}{\partial Y}\cdot\frac{\partial H_3}{\partial y} + \frac{\partial H_2}{\partial z}\cdot\frac{\partial H_3}{\partial Z} - \frac{\partial H_2}{\partial Z}\cdot\frac{\partial H_3}{\partial z}$$

$$= (+Zy - zY) + (0-0) + (-x\cdot 0 + x\cdot 0) = yZ - zY = H_1$$

$$\Rightarrow \{H_2, H_3\} = H_1$$

- $$\{H_3, H_1\} = H_2$$

حل السؤال الثالث:

١- X
٢- ✓
٣- ✓
٤- ✓

انتهى

٢٠٠٦

جامعة البعث — الميكانيك التحليلي — الاسم: ديالا شعبان سعود

كلية العلوم — سنة رابعة — الرقم:

قسم الرياضيات — دورة كانون ٠٦

السؤال الأول: $4\times5 = 20$

ليكن الفضاء الشعاعي E، المزود بالقاعدة $\Omega = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. ليكن أيضاً الموتر (التنسور) التخالفي، $\mu = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 + 5\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$، والمتجه $\vec{v} = \vec{e}_2^{\,*} - \vec{e}_3^{\,*} \in E^*$ (النجمة تشير للثنوية). المطلوب:

١. اكتب عبارة μ، بدلالة القاعدة $\{\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k^{\,*},\ i,j,k = 1,2,3\}$.

٢. احسب الجداء التقليصي $\mu.\vec{v}$ (نقص المركبة الثانية من μ مع $\vec{v}$).

٣. لتكن القاعدة $\sigma = \{\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2,\ \vec{f}_2 = \vec{e}_2,\ \vec{f}_3 = \vec{e}_3 - \vec{e}_2\}$ للفضاء E، احسب عبارة μ بدلالة قاعدة الفضاء $\wedge^2 E$ التالية $\{\vec{f}_1 \wedge \vec{f}_3,\ \vec{f}_2 \wedge \vec{f}_3,\ \vec{f}_1 \wedge \vec{f}_2\}$،

٤. احسب الجداء التقليصي $\vec{f}_1.(\mu \otimes \vec{v})$.

السؤال الثاني: $4\times10 = 40$

تتحرك نقطة مادية، ذات كتلة واحدية، في جملة متعامدة نظامية $Oxyz$، خاضعة لحقل القوى المركزي $\vec{F} = -(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k})$، المطلوب:

١. اوجد تابع لاغرانج L، بدلالة المتحولات $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$، واكتب معادلات لاغرانج،

٢. اكتب عبارة المتحولات X, Y, Z المرافقة على الترتيب للمتحولات x, y, z بدلالة المتحولات $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ (تحويل ليجندر).

٣. اعطي هاملتوني المسألة، واكتب معادلات هاملتون الستة،

٤. بين أنّ الدالة التالية $H_1 = x^2 + X^2$ تكامل اولي.

السؤال الثالث: $4\times5 = 20$

أجب بكلمة صح، أو بكلمة خطأ فقط عن كل مما يلي،

١. يمكن تطبيق مبادئ التوازن لدراسة الحركات بإجراء تعديلات مناسبة في القوى، صح

٢. معادلات هملتون اقل رتبة من معادلات لاغرانج، ولها نفس العدد، خطأ

٣. تكون الدالة F، تكاملا أوليا لحقل الدالة H، إذا كان $\{F, H\} = \{H, F\}$. صح

٤. إذا كان E فضاء متجهي منتهي البعد، فإن الفضاء $E \otimes E^*$ فضاء تخالفي جزئي منتهي البعد. خطأ

مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق — الدكتور خالد العيحاش

٢٠٦

(دورة كانون ٦)

حل السؤال الأول :

١) نطبق دستور الجداء الخارجي : $M_1 \wedge M_2 = M_1 \otimes M_2 - M_2 \otimes M_1$ فيكون :

$$M = e_1 \wedge e_2 + 5 e_2 \wedge e_3$$
$$= e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 + 5 e_2 \otimes e_3 - 5 e_3 \otimes e_2$$

$$v = e_2^* - e_3^*$$

٢) بتقليص المركبة الثانية من M مع v نجد :

$$M \cdot v = (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 + 5 e_2 \otimes e_3 - 5 e_3 \otimes e_2)(e_2^* - e_3^*)$$
$$= e_1 \otimes \underbrace{e_2 \cdot e_2^*}_{1} - e_2 \otimes \underbrace{e_1 e_2^*}_{0} + 5 e_2 \otimes \underbrace{e_3 \cdot e_2^*}_{0} - 5 e_3 \otimes \underbrace{e_2 \cdot e_2^*}_{1}$$
$$- e_1 \otimes \underbrace{e_2 e_3^*}_{0} + e_2 \otimes \underbrace{e_1 e_3^*}_{0} - 5 e_2 \otimes \underbrace{e_3 e_3^*}_{1} + 5 e_3 \otimes \underbrace{e_2 e_3^*}_{0}$$
$$= e_1 - 5 e_3 - 5 e_2$$

٣) نحسب أولاً عناصر القاعدة $E^\wedge E^*$:

$$f_1 \wedge f_2 = (\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \wedge \vec{e}_2 = e_1 \wedge e_2 - \underbrace{e_2 \wedge e_2}_{0} = e_1 \wedge e_2$$

$$f_2 \wedge f_3 = (\vec{e}_2) \wedge (\vec{e}_3 - \vec{e}_2) = e_2 \wedge e_3 - \underbrace{e_2 \wedge e_2}_{0} = e_2 \wedge e_3$$

$$f_3 \wedge f_1 = (\vec{e}_3 - \vec{e}_2) \wedge (\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = e_3 \wedge e_1 - e_3 \wedge e_2 - e_2 \wedge e_1 + \underbrace{e_2 \wedge e_2}_{0}$$
$$= e_3 \wedge e_1 + e_2 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_2$$

دوماً : $e_i \wedge e_i = 0$

نلاحظ أن (بالمقارنة) :

$$M = e_1 \wedge e_2 + 5 e_2 \wedge e_3$$
$$= f_1 \wedge f_2 + 5 f_2 \wedge f_3$$

٤)

$$(M \otimes \vec{v}) \cdot \vec{f}_1 = M \otimes (\vec{v} \cdot \vec{f}_1)$$
$$= M \otimes \left[(e_2^* - e_3^*)(e_1 - e_2) \right]$$
$$= M \otimes \left[\underbrace{e_2^* e_1}_{0} - \underbrace{e_2^* e_2}_{1} - \underbrace{e_3^* e_1}_{0} - \underbrace{e_3^* e_2}_{0} \right]$$
$$= M \otimes (-1)$$

$$\Rightarrow (M \otimes \vec{v}) \cdot \vec{f}_1 = -M$$

حل السؤال الثاني $\vec{F} = -(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$

[1]

- شعاع الموضع $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
- شعاع السرعة $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$
- $L = T - V$ تابع لاغرانج ؛ $T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

؛ $m = 1$ (النقطة المادية ذات كتلة واحدية)

- ولحساب الطاقة الكامنة نبحث عن دالة V بحيث $\overrightarrow{\text{grad}\, V} = -\vec{F}$ $\Leftarrow$

$$\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

نضرب الطرفين داخلياً بـ $\vec{dr}$ نجد:

$$dV = x\,dx + y\,dy + z\,dz$$

بالمكاملة:

$$V = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

الآن نعوض في عبارة تابع لاغرانج نجد:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

- معادلات لاغرانج تعطى بالدستور:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_k} - \frac{\partial L}{\partial p_k} = 0$$

حيث $p_1 = x,\ p_2 = y,\ p_3 = z$

بالتعويض:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\dot{x} + x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + x = 0 \quad \cdots (1)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\dot{y} + y = 0 \Rightarrow \ddot{y} + y = 0 \quad \cdots (2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\dot{z} + z = 0 \Rightarrow \ddot{z} + z = 0 \quad \cdots (3)$$

[2] تحويل لوجندر من الشكل

$$q_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_k}$$

حيث
$$\begin{cases} p_1 = x,\ p_2 = y,\ p_3 = z \\ q_1 = X,\ q_2 = Y,\ q_3 = Z \end{cases}$$
بالتعويض نجد:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} \Rightarrow X = \dot{x} \\ Y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} \Rightarrow Y = \dot{y} \\ Z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \dot{x} \Rightarrow Z = \dot{z} \end{aligned}\right\}$$

[٢] هاملتوني المسألة يعطى بالدستور:

$$H = \sum_{i=1}^{n} (q_i \dot{p}_i - L) \circ L(p, q)$$

$$= (X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z} - L) \circ L(x, y, z, X, Y, Z)$$

نعوض بالتعويض بعزم كمية الحركة (نعوض بتحويل لوجندر):

$$\Rightarrow H = X \cdot X + Y \cdot Y + Z \cdot Z - \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$= (X^2 + Y^2 + Z^2) - \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)}$$

• معادلات هاملتون تعطى بالدستور:

بالتعريف: $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$ & $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$

$$\left.\begin{array}{ll} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial X} = X & ; \quad \dot{X} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial Y} = Y & ; \quad \dot{Y} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -y \\ \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial Z} = Z & ; \quad \dot{Z} = -\frac{\partial H}{\partial z} = -z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

معادلات هاملتون الستة:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} - X = 0 \\ \dot{y} - Y = 0 \\ \dot{z} - Z = 0 \end{array}\right\} \& \left\{\begin{array}{l} \dot{X} + x = 0 \\ \dot{Y} + y = 0 \\ \dot{Z} + z = 0 \end{array}\right.$$

[٤] حتى تكون الدالة H_x تكامل أولي يجب أن تحقق الشرط التالي:

$$\{H, H_x\} = 0$$

$$\{H, H_x\} = \left(\frac{\partial H}{\partial X} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial X}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial Y} - \frac{\partial H}{\partial Y} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)$$

$$+ \left(\frac{\partial H}{\partial z} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial Z} - \frac{\partial H}{\partial Z} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial z}\right)$$

$$= (x \cdot 2X - X \cdot 2x) + (y \cdot 0 - Z \cdot 0) + (y \cdot 0 - Y \cdot 0)$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

وبالتالي H_x تكامل أولي.

by:
soheb
aswad

• حل السؤال الثالث:

١ خطأ - ٢ صح - ٣ خطأ - ٤ صح

التعليل:

١- خطأ: لأن الفضاء الذي ... هو فضاء جزئي من فضاء تشكيلي

٣- خطأ: لأنها حسب عدد معادلات لاغرانج

جامعة البعث — الميكانيك التحليلي — الاسم:

كلية العلوم — سنة رابعة — الرقم:

قسم الرياضيات — دورة كانون ٠٦

السؤال الأول : 20 = 5×4

ليكن الفضاء الشعاعي E ، المزود بقاعدة $\Omega = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. ليكن أيضاً المؤثر (التنسور) التخالفي ، $\mu = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 + 5\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$ ، والمتجه $\vec{v} = \vec{e}_2^{\,*} - \vec{e}_1^{\,*} \in E^*$ (النجمة تشير للثنوية). المطلوب :

١. اكتب عبارة μ ، بدلالة القاعدة $\{\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k^{\,*} \ , \ i,j,k = 1,2,3\}$.

٢. احسب الجداء التقلصي $\mu.\vec{v}$ (تقلص المركبة الثانية من μ مع $\vec{v}$).

٣. لتكن القاعدة $\sigma = \{\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 , \vec{f}_2 = \vec{e}_2 , \vec{f}_3 = \vec{e}_3 - \vec{e}_1\}$ للفضاء E ، احسب عبارة μ بدلالة قاعدة الفضاء $\wedge^2 E$ التالية $\{\vec{f}_1 \wedge \vec{f}_3 , \vec{f}_2 \wedge \vec{f}_3 , \vec{f}_1 \wedge \vec{f}_2\}$.

٤. احسب الجداء التقلصي $\vec{f}_1.(\mu \otimes \vec{v})$.

السؤال الثاني : 40 = 10×4

تتحرك نقطة مادية، ذات كتلة واحدية، في جملة متعامدة نظامية $Oxyz$ ، خاضعة لحقل القوى المركزي $\vec{F} = -(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ ، المطلوب :

١. أوجد تابع لاغرانج L ، بدلالة المتحولات $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ، واكتب معادلات لاغرانج.

٢. اكتب عبارة المتحولات X, Y, Z المرافقة على الترتيب للمتحولات x, y, z بدلالة المتحولات $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ (تحويل ليجندر).

٣. أعطي هاملتوني المسألة، واكتب معادلات هاملتون القانونية.

٤. بين أن الدالة التالية $H_1 = x^2 + X^2$ تكامل أولي.

السؤال الثالث : 20 = 5×4

أجب بكلمة صح، أو بكلمة خطأ لكل مما يلي:

١. يمكن تطبيق مبادئ التوازن لدراسة الحركات بإجراء تعديلات مناسبة في القوى.

٢. معادلات هاملتون أقل رتبة من معادلات لاغرانج، ولها نفس العدد.

٣. تكون الدالة F ، تكاملاً أولياً لحقل الدالة H ، إذا كان $(H, F) = (F, H)$.

٤. إذا كان E فضاء متجهي منتهي البعد، فإن الفضاء $E \otimes E^*$ فضاء تنسوري جزئي منتهي البعد.

مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق

الدكتور [illegible]

(دورة كانون ٢٠١٦)

حل السؤال الأول :

① نطبق الدستور الجبري التالي : $\mu_1 \wedge \mu_2 = \mu_1 \otimes \mu_2 - \mu_2 \otimes \mu_1$ فيكون :

$$\mu = e_1 \wedge e_2 + 5 e_2 \wedge e_3$$
$$= e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 + 5 e_2 \otimes e_3 - 5 e_3 \otimes e_2$$

$$v = e_2^* - e_3^*$$

② بتقليص المركبة الثانية من μ مع v نجد :

$$\mu . v = (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 + 5 e_2 \otimes e_3 - 5 e_3 \otimes e_2)(e_2^* - e_3^*)$$
$$= e_1 \otimes \underbrace{e_2 . e_2^*}_{1} - e_2 \otimes \underbrace{e_1 e_2^*}_{0} + 5 e_2 \otimes \underbrace{e_3 . e_2^*}_{0} - 5 e_3 \otimes \underbrace{e_2 . e_2^*}_{1}$$
$$- e_1 \otimes \underbrace{e_2 e_3^*}_{0} + e_2 \otimes \underbrace{e_1 e_3^*}_{0} - 5 e_2 \otimes \underbrace{e_3 e_3^*}_{1} + 5 e_3 \otimes \underbrace{e_2 e_3^*}_{0}$$
$$= e_1 - 5 e_3 - 5 e_2$$

③ نحسب أولاً عناصر القاعدة $E \wedge E$:

$$f_1 \wedge f_2 = (\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \wedge \vec{e}_2 = e_1 \wedge e_2 - \underbrace{e_2 \wedge e_2}_{0} = e_1 \wedge e_2$$
$$f_2 \wedge f_3 = (\vec{e}_2) \wedge (\vec{e}_3 - \vec{e}_2) = e_2 \wedge e_3 - \underbrace{e_2 \wedge e_2}_{0} = e_2 \wedge e_3$$
$$f_3 \wedge f_1 = (\vec{e}_3 - \vec{e}_2) \wedge (\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = e_3 \wedge e_1 - e_3 \wedge e_2 - e_2 \wedge e_1 + \underbrace{e_2 \wedge e_2}_{0}$$
$$= e_3 \wedge e_1 + e_2 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_2$$

دوماً : $e_i \wedge e_i = 0$

نلاحظ أنه (بالمقارنة) :

$$\mu = e_1 \wedge e_2 + 5 e_2 \wedge e_3$$
$$= f_1 \wedge f_2 + 5 f_2 \wedge f_3$$

④

$$(\mu \otimes \vec{v}) . \vec{f}_1 = \mu \otimes (\vec{v} . \vec{f}_1)$$
$$= \mu \otimes [(e_2^* - e_3^*)(e_1 - e_2)]$$
$$= \mu \otimes [\underbrace{e_2^* e_1}_{0} - \underbrace{e_2^* e_2}_{1} - \underbrace{e_3^* e_1}_{0} - \underbrace{e_3^* e_2}_{0}]$$
$$= \mu \otimes (-1)$$
$$\Rightarrow (\mu \otimes \vec{v}) . \vec{f}_1 = -\mu$$

$$\vec{e}_i . \vec{e}_j^{\,*} =$$

حل السؤال الثاني: $F = -(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$

[1]

شعاع الموضع: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

شعاع السرعة: $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$

$T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$; تابع لاغرانج $L = T - V$

$m = 1$ (النقطة المادية ذات كتلة واحدية)

ولحساب الطاقة الكامنة نبحث عن دالة V بحيث $\overrightarrow{\text{grad}\, V} = -\vec{F}$ ⇐

$$\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

نضرب الطرفين داخلياً بـ $\vec{dr}$ نجد:

$$dV = x\,dx + y\,dy + z\,dz$$

بالتكامل:

$$V = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

الآن نعوض في عبارة تابع لاغرانج نجد:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

معادلات لاغرانج تعطى بالدستور:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_k} - \frac{\partial L}{\partial p_k} = 0$$

حيث $p_1 = x,\ p_2 = y,\ p_3 = z$

بالتعويض:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\dot{x} + x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + x = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\dot{y} + y = 0 \Rightarrow \ddot{y} + y = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\dot{z} + z = 0 \Rightarrow \ddot{z} + z = 0 \quad \text{--- (3)}$$

[2] تحويل لوجندر من الشكل: $q_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_k}$

حيث $p_1 = x,\ p_2 = y,\ p_3 = z$ ؛ $q_1 = X,\ q_2 = Y,\ q_3 = Z$

بالتعويض نجد:

$$X = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} \Rightarrow X = \dot{x}$$

$$Y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} \Rightarrow Y = \dot{y}$$

$$Z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \dot{z} \Rightarrow Z = \dot{z}$$

وهي العبارة المطلوبة

[2] هاملتوني مسألة تتعلق بالدستور:

$$H = \sum_{i=1}^{n} (q_i \dot{p}_i - L) \circ L(p, q)$$

$$= (X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z} - L) \circ L(x, y, z, X, Y, Z)$$

نعوض بالقيم المعرفة بالعلاقة التركيبية (نعوض كل المجاهيل)

$$\Rightarrow H = X \cdot X + Y \cdot Y + Z \cdot Z - \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$= (X^2 + Y^2 + Z^2) - \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)}$$

• معادلات هاملتون تعطى بالعلاقات التالية:

بالتعريف:
$$\boxed{\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \& \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial X} = X \quad ; \quad \dot{X} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial Y} = Y \quad ; \quad \dot{Y} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -y \\ \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial Z} = Z \quad ; \quad \dot{Z} = -\frac{\partial H}{\partial z} = -z \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

معادلات هاملتون الستة:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} - X &= 0 \\ \dot{y} - Y &= 0 \\ \dot{z} - Z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \& \quad \left\{\begin{aligned} \dot{X} + x &= 0 \\ \dot{Y} + y &= 0 \\ \dot{Z} + z &= 0 \end{aligned}\right.$$

[4] حتى تكون الدالة H_x تكامل أولي يجب أن تحقق الشرط التالي:

$$\boxed{\{H, H_x\} = 0} \qquad H_x = x^2 + X^2$$

$$\{H, H_x\} = \left(\frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial X} - \frac{\partial H}{\partial X} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial Y} - \frac{\partial H}{\partial Y} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)$$

$$+ \left(\frac{\partial H}{\partial z} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial Z} - \frac{\partial H}{\partial Z} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial z}\right)$$

$$= (x \cdot 2X - X \cdot 2x) + (y \cdot 0 - Z \cdot 0) + (y \cdot 0 - Y \cdot 0)$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

by: soheb aswad..

وبالتالي H_x تكامل أولي..

• حل السؤال الثالث:

١. صح - ٢. خطأ - ٣. صح - ٤. خطأ

للتصحيح:
٢. خطأ: عدد معادلات هاملتون ستة معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى...
٤. خطأ: لأن الفضاء الذي هو فضاء جزئي من فضاء تشكيلي

بالنسبة لـ

$$\{H, H_x\} = \left(\frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial X} - \frac{\partial H}{\partial X} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial x}\right) + (\text{بالنسبة لـ } y, Y) + (z, Z)$$

صغيرة، كبيرة، كبيرة، صغيرة

تحليل

(دورة حزيران ٢٠١٦)

حل السؤال الأول :

1

$M = e_1 \otimes e_1^* + 2e_1 \otimes e_2^* - 2e_2 \otimes e_2^* + e_1 \otimes e_3^*$

الأثر هو مجموع المعاملات

$\Rightarrow \alpha = 1 + 2(0) - 2(1) + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$

2

$\{ f_1 = -e_1 + e_2 + e_3 ,\ f_2 = e_2 - e_3 ,\ f_3 = e_2 \}$

$\vec{f}_i = A \cdot \vec{e}_i \ ;\ i = 1,2,3 \ ;\ A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

أي أننا كتبنا الجملة بالشكل :

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

والمطلوب هو كتابة عناصر M بدلالة عناصر القاعدة f وعناصر القاعدة الثنوية f^* :

- $f_i = A\, e_i \Rightarrow e_i = A^{-1} f_i$
- $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A} \ ;\ \tilde{A}$: نستخدم طريقة المرافق
- $|A| = -1 \ ,\ A_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$ بالتعويض

$A_{11} = 0 \quad A_{12} = 0 \quad A_{13} = 1$

$A_{21} = 0 \quad A_{22} = 0 \quad A_{23} = -1$

$A_{31} = 2 \quad A_{32} = -1 \quad A_{33} = -1$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = -f_1 - f_2 + 2f_3 \\ e_2 = f_3 \\ e_3 = -f_2 + f_3 \end{cases}$$

عناصر e بدلالة f

لكتابة عناصر M بدلالة f^* نضع :

$e^* = B \cdot f^*$ حيث $\boxed{B = (C^T)^{-1}}$

بنفس الطريقة نحسب $(C^T)^{-1}$ نجد أنه :

$$B = (C^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} e_1^* \\ e_2^* \\ e_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^* \\ f_2^* \\ f_3^* \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} e_1^* = -f_1^* \\ e_2^* = f_1^* + f_2^* + f_3^* \\ e_3^* = f_1^* - f_2^* \end{cases}$$

عناصر e^* بدلالة f^*

[٣] لحساب β علينا حساب عبارة M الجديدة:

$$M = e_1 \otimes e_1^* + 2 e_1 \otimes e_2^* - 2 e_2 \otimes e_2^* + e_3 \otimes e_3^*$$

أولاً نحسب المقادير بالمركبات الجديدة:

$$① \; e_1 \otimes e_1^* = [-f_1 + f_2 + 2f_3] \otimes [-f_1^*] = f_1 \otimes f_1^* + f_2 \otimes f_1^* - 2 f_3 \otimes f_1^*$$

$$② \; -2 e_2 \otimes e_2^* = \left[-2 f_3 \otimes (f_1^* + f_2^* + f_3^*)\right] = -2 f_3 \otimes f_1^* - 2 f_3 \otimes f_2^* - 2 f_3 \otimes f_3^*$$

$$③ \; e_3 \otimes e_3^* = \left[(-f_2 + f_3) \otimes (f_1^* - f_2^*)\right] = -f_2 \otimes f_1^* + f_2 \otimes f_2^* + f_3 \otimes f_1^* - f_3 \otimes f_2^*$$

وبالاستفادة من $e_1 \otimes e_1^*$ في $2 e_1 \otimes e_2^*$:

بالحساب:

$$④ \; e_1 \otimes e_1^* + 2 e_1 \otimes e_2^* = e_1 \otimes (e_1^* + 2 e_2^*)$$

$$= f_1 \otimes f_1^* - 2 f_1 \otimes f_2^* - 2 f_1 \otimes f_3^* - f_2 \otimes f_1^* - 2 f_2 \otimes f_2^*$$

$$- 2 f_1 \otimes f_1^* + 2 f_3 \otimes f_1^* + 4 f_3 \otimes f_2^* + 4 f_3 \otimes f_3^*$$

الآن بجمع العلاقات ١، ٢، ٣ نحصل على عبارة M الجديدة:

$$⑤ \; M = -f_1 \otimes f_1^* - 2 f_1 \otimes f_2^* - 2 f_1 \otimes f_3^* - 2 f_3 \otimes f_1^* + f_2 \otimes f_2^* - 2 f_2 \otimes f_3^*$$

$$+ f_3 \otimes f_1^* + f_3 \otimes f_2^* + 2 f_3 \otimes f_3^*$$

الآن نحسب β نجمع معاملات المركبة الأولى مع المركبة الثانية في عبارة M (كما في الطلب الأول):

$$\Rightarrow \beta = -1 + 0 + 0 + 0 - 1 + 0 + 0 + 0 + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$$

[٤] إن $\alpha \neq \beta$ وذلك لأنه:

$$\begin{cases} \alpha \in E \otimes E^* \\ \beta \in F \otimes F^* \end{cases}$$ أي أن كل منهما ينتمي إلى فضاء...

by:
t.soheb-ud@hotmail.com
Soheb

حل السؤال الثاني:

$$F = -\frac{\cdots}{x^2 + y^2 + z^2}$$

[1] نبرهن أنه بتطبيق الموضع للنقطة المادية (أخذنا $m=1$):

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

ونشتق السرعة:

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{K}$$

- دالة لاغرانج تعطى بالدستور $L = T - V$
- حساب الطاقة الحركية: $T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$
- حساب الطاقة الكامنة: نبحث عن دالة V بحيث $\vec{grad}\, V = -\vec{F}$

$$\Rightarrow \vec{grad}\, V = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

نضرب الطرفين داخلياً بـ $d\vec{r}$ نجد:

$$dV = \frac{1}{r}\, dr$$

بالتكامل:

$$V = \ln r$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \ln r$$

- تحويل لوجندر: $q_K = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_K}$

حيث نفرض:

$$\begin{cases} p_1 = x & p_2 = y & p_3 = z \\ q_1 = X & q_2 = Y & q_3 = Z \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} \\ Y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} \\ Z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \dot{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} X - \dot{x} = 0 \\ Y - \dot{y} = 0 \\ Z - \dot{z} = 0 \end{array}$$

[2] هاملتونية المسألة لها الدستور:

$$H = \left(\sum_{i=1}^{3} \dot{p}_K q_K - L\right) \circ \left(\dot{x} = X,\ \dot{y} = Y,\ \dot{z} = Z\right)$$

$$= (\dot{p}_1 q_1 + \dot{p}_2 q_2 + \dot{p}_3 q_3 - L) \ldots$$

$$= (X^2 + Y^2 + Z^2) - \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \ln r$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \ln r$$

- معادلات هاملتون

$$\dot{q}_K = \frac{-\partial H}{\partial p_K}, \quad \dot{p}_K = \frac{\partial H}{\partial q_K}$$

(1) $\dot{X} = \frac{-\partial H}{\partial x} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{-x}{r^2}$

(2) $\dot{Y} = \frac{-\partial H}{\partial y} = \frac{-y}{r^2}$

(3) $\dot{Z} = \frac{-\partial H}{\partial z} = \frac{-z}{r^2}$

(4) $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial X} = X \Rightarrow \dot{x} = X$

(5) $\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial Y} = Y \Rightarrow \dot{y} = Y$

(6) $\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial Z} = Z \Rightarrow \dot{z} = Z$

[٢] اثبت

$$\begin{cases} H = \frac{1}{2}|X + Y + Z| + \ln r \\ H_1 = yZ - zY \end{cases}$$

$$L_{\vec{X}_H} H_1 = \{H_1, H\} = \frac{\partial H_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial X} - \frac{\partial H_1}{\partial X} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial H}{\partial Y} - \frac{\partial H_1}{\partial Y} \cdot \frac{\partial H}{\partial y}$$

$$+ \frac{\partial H_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial H}{\partial Z} - \frac{\partial H_1}{\partial Z} \cdot \frac{\partial H}{\partial z}$$

$$= (0 - 0) + \left(ZY + z\frac{y}{r^2}\right) + \left(-YZ - y \cdot \frac{z}{r^2}\right) = ZY + zy\frac{1}{r^2} - ZY - zy\frac{1}{r^2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{L_{\vec{X}_H} H_1 = 0}$$

[٣]

$$\begin{cases} H_2 = zX - xZ \\ H_3 = xY - yX \end{cases}$$

- $$\{H_1, H_2\} = \frac{\partial H_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial X} - \frac{\partial H_1}{\partial X} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial Y} - \frac{\partial H_1}{\partial Y} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial y}$$

$$+ \frac{\partial H_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial Z} - \frac{\partial H_1}{\partial Z} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial z}$$

$$= (0 - 0) + (Z \cdot 0 + z \cdot 0) + (+Yx - yX) = xY - yX \Rightarrow = H_3$$

$$\boxed{\{H_1, H_2\} = H_3}$$

- $$\{H_2, H_3\} = \frac{\partial H_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial H_3}{\partial X} - \frac{\partial H_2}{\partial X} \cdot \frac{\partial H_3}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial H_3}{\partial Y} - \frac{\partial H_2}{\partial Y} \cdot \frac{\partial H_3}{\partial y}$$

$$+ \frac{\partial H_2}{\partial z} \cdot \frac{\partial H_3}{\partial Z} - \frac{\partial H_2}{\partial Z} \cdot \frac{\partial H_3}{\partial z}$$

$$= (+Zy - zY) + (0 - 0) + (-x \cdot 0 + x \cdot 0) = yZ - zY = H_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\{H_2, H_3\} = H_1}$$

- $$\boxed{\{H_3, H_1\} = H_2}$$

حل الإشكاليات

١- X

٢- ✓

٣- ✓

٤- ✓

أحسنت

جامعة البعث	الميكانيك التحليلي	الاسم:
كلية العلوم	سنة رابعة	الرقم:
قسم الرياضيات	حزيران 07

السؤال الأول: $20 = 5 \times 4$

ليكن الفضاء المتجهي E، المزود بالقاعدة $\Omega_E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$، ولتكن قاعدتها الثنوية $\Omega_E^* = (\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*)$، في الفضاء E^*. ليكن أيضاً الفضاء المتجهي F، المزود بالقاعدة $\Omega_F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$، ولتكن قاعدتها الثنوية $\Omega_F^* = (\vec{f}_1^*, \vec{f}_2^*, \vec{f}_3^*)$، في الفضاء F^*. ليكن أيضاً السوتران (التنسوران):

$\nu = \vec{e}_1^* \otimes \vec{f}_1 - \vec{e}_2^* \otimes \vec{f}_3$، $\mu = \vec{f}_1^* \otimes \vec{e}_2$. المطلوب:

1. احسب ناتج الجداء التقلصي $\alpha = \mu \cdot \nu$ (قلص المركبة الثانية من μ، مع الأولى من ν).
2. احسب ناتج الجداء التقلصي $\beta = \vec{f}_1^* \cdot \alpha$.
3. إلى أي فضاء ينتمي المقدار β.
4. أعط قاعدة الفضاء $F \otimes E^*$.

السؤال الثاني: $40 = 10 \times 4$

تتحرك نقطة مادية، ذات كتلة واحدية، في جملة محاور متعامدة ونظامية $Oxyz$، وتخضع لحقل القوى $\vec{F} = r\,\vec{r}$، حيث $\vec{r}$ هو متجه الموضع، و $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. المطلوب:

1. اكتب تابع لاغرانج L، وأعطِ العلاقات التي تعرف المتحولات X, Y, Z المرافقة ترتيباً للمتحولات x, y, z.
2. احسب $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$، بدلالة المتحولات x, y, z، ومرافقاتها، ثم أعطِ هاملتوني المسألة H.
3. بيّن كون أو عدم كون الدالة $F = xY - Xy$ تكاملاً أولياً لمسألتنا.
4. بيّن تعارض أو عدم تعارض التكاملان الأوليان $G_1 = yZ - Yz$، $G_1 = zX - Zx$.

السؤال الثالث: $20 = 5 \times 4$

أجب بكلمة صح، أو بكلمة خطأ لكل مما يلي:

1. الدوال المولدة للتحويلات القانونية، هي تكاملات أولية بالضرورة.
2. جداء تكاملان أوليان هو تكامل أولي.
3. الدالة H^2، تكاملاً أولياً، بالنسبة لمسألة هاملتونيها H.
4. تابع لاغرانج ثابت، بمرور الزمن (أثناء الحركة).

مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق

الدكتور خالد العيساوي

و مجموع كامليه أولية هو تكامل أولي

تكامل أولي $\{H, H\} = 0$

(مذاكرة ٢ ...)

حل السؤال الأول:

[أ] لدينا:

$$\circ\ M = f_1 \otimes e_2$$

$$\circ\ U = e_1^* \otimes f_1 - e_2^* \otimes f_1$$

$$\Rightarrow \alpha = M \cdot U = (f_1 \otimes e_2)(e_1^* \otimes f_1 - e_2^* \otimes f_1)$$

$$= f_1 \otimes \underbrace{e_2 \cdot e_1^*}_{0} \otimes f_1 - f_1 \otimes \underbrace{e_2 \cdot e_2^*}_{1} \otimes f_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = -f_1 \otimes f_1}$$

[٢] حساب β:

$$\circ\ \beta = f_2^* \cdot \alpha$$

$$= f_2^* \cdot (-f_1 \otimes f_1) = -\underbrace{f_2^* \cdot f_1}_{0} \otimes f_1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = 0}$$

[٣] من العلاقة السابقة:

$$\beta = f_2^* \cdot (-f_1 \otimes f_1)$$

$$\Rightarrow \beta \in -f_2^* \cdot f_1 \otimes f_1$$

$$\beta \in \underbrace{F^* \cdot F}_{1} \otimes F = F$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta \in \vec{F}}$$

[٤] إن عدد أبعاد هذه القاعدة $= i \times j = ٣ \times ٢ = ٦$

$\Leftarrow \left\{ f_i \otimes e_j^* \ ;\ \begin{matrix} i = 1,2,3 \\ j = 1,2 \end{matrix} \right\}$ قاعدة للفضاء التنسوري $F \otimes E^*$

حل السؤال الثاني: $\vec{F} = r \cdot \vec{r}$

[١] شعاع الموضع للنقطة المادية $(m=1)$: $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

• لحساب تابع لاغرانج يلزمنا:

الطاقة الحركية: $T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \Leftarrow T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

الطاقة الكامنة: نحسبها من دالة V حيث $\overrightarrow{grad}\, V = -\vec{F}$

$$d\vec{r} \longrightarrow \boxed{\frac{dV}{d\vec{r}} = -\vec{F}} \Rightarrow dV = -\vec{F}\, d\vec{r}$$

$$= -r\,\vec{r}\, d\vec{r}$$

$$= -r^2 \frac{\vec{r}}{r}\, d\vec{r}$$

$$V = -\frac{1}{3} r^3 \Leftarrow \quad \Rightarrow dV = -r^2 \cdot dr$$

١

ο دالة لاجرانج: $L = T - V$

ο تحويلة لوجندر: $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2) + \frac{1}{3}r^3$$

من الدستور: $q_i = \frac{\partial L}{\partial \dot p_i}$ حيث

$q_1 = X$, $q_2 = Y$, $q_3 = Z$ & $p_1 = x$, $p_2 = y$, $p_3 = z$

$$q_i = \frac{\partial L}{\partial \dot p_i}$$

$$\Rightarrow X = \frac{\partial L}{\partial \dot x} = \dot x, \quad Y = \frac{\partial L}{\partial \dot y} = \dot y, \quad Z = \frac{\partial L}{\partial \dot z} = \dot z$$

[٢] هاملتونين المسألة:

$$H = \left(\sum_{i=1}^{3} q_i \dot p_i - L\right) \circ d(p,q)$$

$$H = \left[X\dot x + Y\dot y + Z\dot z - \frac{1}{2}(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2) - \frac{1}{3}r^3\right] \circ d(\underbrace{x,y,z}_{p},\underbrace{X,Y,Z}_{q})$$

$$\Rightarrow H = \left[X\cdot X + Y\cdot Y + Z\cdot Z - \frac{1}{2}(X^2+Y^2+Z^2) - \frac{1}{3}r^3\right]$$

$$= (X^2+Y^2+Z^2) - \frac{1}{2}(X^2+Y^2+Z^2) - \frac{1}{3}r^3$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2}(X^2+Y^2+Z^2) - \frac{1}{3}r^3$$

ο معادلات هاملتون: من الدستور: $\dot p_k = \frac{\partial H}{\partial q_k}$; $k = 1,2,3$

$$\dot p_k = \frac{\partial H}{\partial q_k}$$

نعرف: $\dot q_k = \frac{-\partial H}{\partial p_k}$

$\dot x = \frac{\partial H}{\partial X} = X \Rightarrow \dot x - X = 0$ .... ①

$\dot y = \frac{\partial H}{\partial Y} = Y \Rightarrow \dot y - Y = 0$ .... ②

$\dot z = \frac{\partial H}{\partial Z} = Z \Rightarrow \dot z - Z = 0$ .... ③

$\dot X = \frac{-\partial H}{\partial x} = x r^2 \Rightarrow \dot X - x r^2 = 0$ .... ④

$\dot Y = \frac{-\partial H}{\partial y} = y r^2 \Rightarrow \dot Y - y r^2 = 0$ .... ⑤

$\dot Z = \frac{-\partial H}{\partial z} = z r^2 \Rightarrow \dot Z - z r^2 = 0$ .... ⑥

وهي معادلات هاملتون المستقرة

ο تصحيح من (الدرس ١)

$$\frac{-\partial H}{\partial x} = \left(\frac{1}{3}r^3\right) = \left[\frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}-1}\cdot(2x) = x r^2$$

Shaheb

[٣] حتى تكون الدالة F تكاملاً أولياً يجب أن يتحقق الشرط $\{H, F\} = 0$:

$$\{H, F\} = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial z}$$

$$= (x)(y) - (-xr^2)(-y) + (y)(-x) - (-yr^2)(x) + (z)(0) - (-zr^2)(0)$$

$$= xy - xyr^2 - xy + xyr^2 + 0 - 0 = 0$$

الشرط محقق ⇐ الدالة F تكامل أولي لمسألتنا ..

[٤] حتى تكون التكاملات الأولية متعارضة يجب تحقق الشرط : $\{G_1, G_2\} = 0$:

$$\{G_1, G_2\} = \frac{\partial G_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial G_2}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial G_2}{\partial y} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial G_2}{\partial z} - \frac{\partial G_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial G_2}{\partial z}$$

$$= (z)(0) - (-z)(0) + (0)(\ ) - (0)(\ ) + (-x)(-y) - (x)(y)$$

$$= 0 - 0 + 0 + xy - yx = xy - yx = F$$

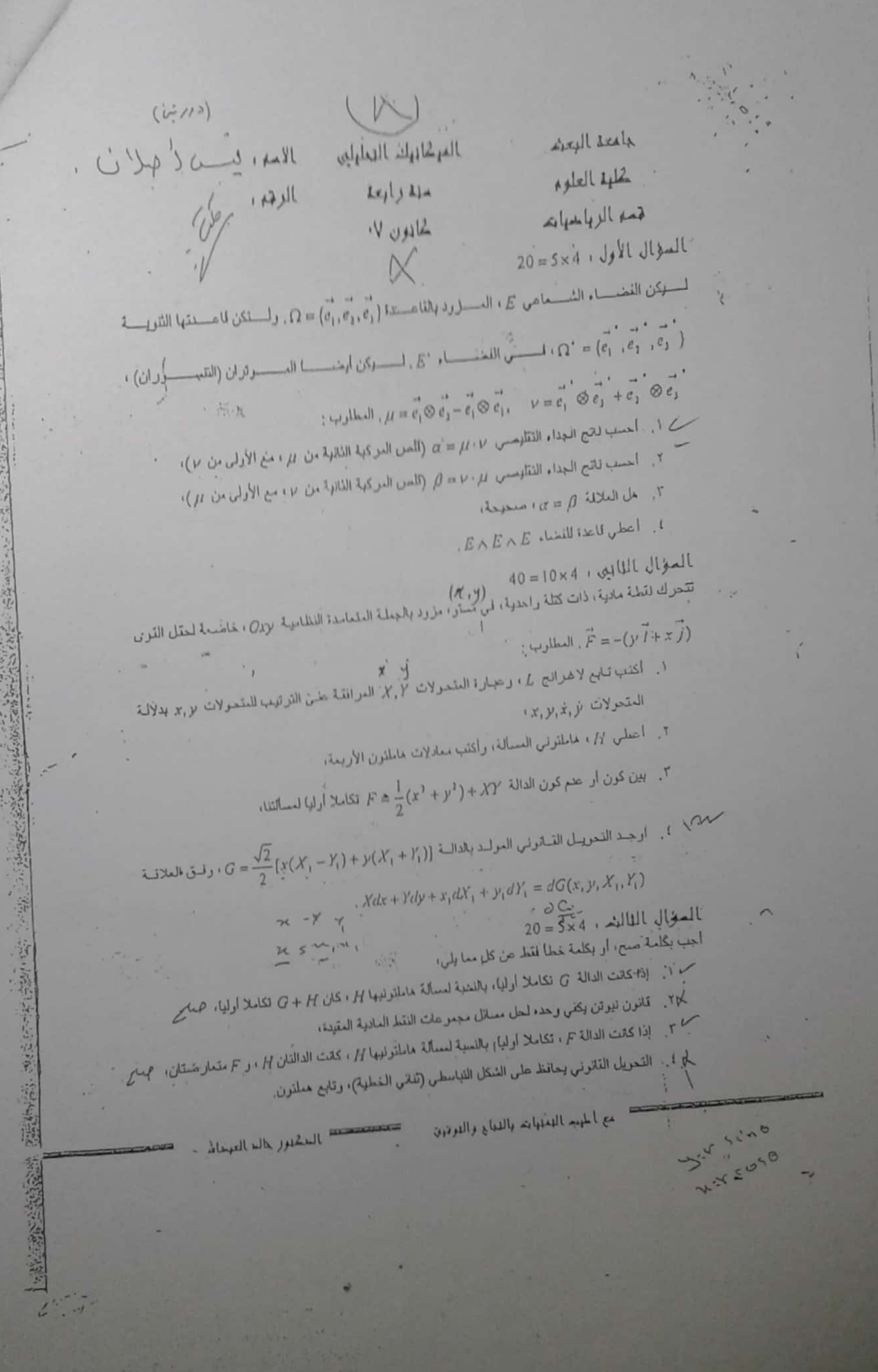
إذاً $\{G_1, G_2\} = F \neq 0$ ⇐ غير متعارضة ...

[٥] ما في طلب ٥ ..

حل السؤال الثالث :

١. خطأ
٢. صح
٣. صح
٤. خطأ

والله الموفق



جامعة البعث — كلية العلوم — قسم الرياضيات

الميكانيك التحليلي — سنة رابعة — كانون ٠٧

الاسم :

الرقم :

السؤال الأول : $20 = 5 \times 4$

ليكن الفضاء الشعاعي E ، المزود بالقاعدة $\Omega = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$، ولتكن قاعدتها الثنوية $\Omega^* = (\vec{e}_1^{\,*}, \vec{e}_2^{\,*}, \vec{e}_3^{\,*})$ ، في الفضاء E^* . ليكن أيضاً المؤثران (التنسوران) ،

$\mu = \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 - \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3$ ، $\nu = \vec{e}_1^{\,*} \otimes \vec{e}_3^{\,*} + \vec{e}_2^{\,*} \otimes \vec{e}_3^{\,*}$. المطلوب :

١. احسب ناتج الجداء التقلصي $\alpha = \mu \cdot \nu$ (لمس المركبة الثانية من μ ، مع الأولى من ν)،

٢. احسب ناتج الجداء التقلصي $\beta = \nu \cdot \mu$ (لمس المركبة الثانية من ν ، مع الأولى من μ)،

٣. هل العلاقة $\beta = \alpha$ ، صحيحة،

٤. أعطي قاعدة للفضاء $E \wedge E \wedge E$.

السؤال الثاني : $40 = 10 \times 4$

تتحرك نقطة مادية، ذات كتلة واحدية، في مستوٍ مزود بالجملة المتعامدة النظامية Oxy ، خاضعة لحقل القوى $\vec{F} = -(y\,\vec{i} + x\,\vec{j})$. المطلوب :

١. اكتب تابع لاغرانج L ، وعبارة المتحولات X, Y المرافقة على الترتيب للمتحولات x, y بدلالة المتحولات $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ ،

٢. أعطي H ، هاملتوني المسألة، واكتب معادلات هاملتون الأربعة،

٣. بين كون أو عدم كون الدالة $F = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + XY$ تكاملاً أولياً لمسألتنا،

٤. أوجد التحويل القانوني المولد بالدالة $G = \frac{\sqrt{2}}{2}[x(X_1 - Y_1) + y(X_1 + Y_1)]$ ، وفق العلاقة $Xdx + Ydy + x_1 dX_1 + y_1 dY_1 = dG(x, y, X_1, Y_1)$.

السؤال الثالث : $20 = 5 \times 4$

أجب بكلمة صح، أو بكلمة خطأ فقط عن كل مما يلي،

١. إذا كانت الدالة G تكاملاً أولياً، بالنسبة لمسألة هاملتونيها H ، كان $G + H$ تكاملاً أولياً،

٢. قانون نيوتن يكفي وحده لحل مسائل مجموعات النقط المادية المقيدة،

٣. إذا كانت الدالة F ، تكاملاً أولياً بالنسبة لمسألة هاملتونيها H ، كانت الدالتان H ، و F متعارضتان،

٤. التحويل القانوني يحافظ على الشكل التباسطي (ثنائي الخطية)، وتابع هملتون.

مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق

الدكتور خالد العيطة .

فصل أول
٢٠٠٧

حلول

السؤال الأول :

$$\alpha = \mu \cdot \nu = (\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 - \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1) \cdot (\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3)$$

$$= \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3 + \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3 - \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3 - \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3$$

$$= \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3 - \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3 = 0$$

$$\beta = \nu \cdot \mu = 0$$

ملاحظة
تعليق الدكتور بين قوسين هو شرح لبداية التفاضل
الملاحظة $\beta : \alpha$ لست متساوية لأن $\alpha \in E \otimes E^*$ ، $\beta \in E^* \otimes E$
أي أن كل منهما من فضاء — اختلاف الفضاءات

$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$ هي فضاء من $E \wedge E \wedge E$

السؤال الثاني :

معادلات النقطة المادية تتحرك في مستوٍ تاماً ثابتاً هي (x, y) نقط

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ شعاع موضع

$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$ سرعة

$\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j}$

$\vec{\dot{v}} = \dot{y}\vec{i} + \dot{x}\vec{j}$

حساب تابع لاغرانج

$L = T - V$

حساب الطاقة الحركية

$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$

حساب الطاقة الكامنة

$\vec{F} = -\text{grad}\, V \Rightarrow$

$$\Rightarrow -(y\vec{i} + x\vec{j}) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}\right) \Rightarrow y\vec{i} + x\vec{j} = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}$$

$\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} = 0$

نضرب الطرفين بـ $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$ نجد

$$y\,dx + x\,dy = dV \Rightarrow d(x \cdot y) = dV \Rightarrow$$

$V = x \cdot y$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - x \cdot y$$

$q_1 = X,\ q_2 = Y \quad , \quad p_1 = x,\ p_2 = y$

$X = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} \quad , \quad Y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y}$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i} = q_i$

حـ ٣ (هاملتون)

$$H = \left(\sum_{i=1}^{2} \dot{p}_i q_i - L\right) \circ \varphi(x, y, X, Y)$$

$$H = (\dot{p}_1 q_1 + \dot{p}_2 q_2 - L) \circ \varphi(x, y, X, Y)$$

$$H = \left[\dot{x}X + \dot{y}Y - \left(\tfrac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - xy\right)\right] \circ \varphi$$

نعوض بالصفر

$$= X^2 + Y^2 - \tfrac{1}{2}(X^2 + Y^2) + xy$$

$$H = \tfrac{1}{2}(X^2 + Y^2) + xy$$

$\dot{x} \to X$ ، $\dot{y} \to Y$ ، p_1 ، p_2

معادلات هاملتون الأربعة

$$\boxed{\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}}, \quad \boxed{\dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i}} \quad (i = 1, 2)$$

نأخذ $\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}$

$$i = 1 \Rightarrow \dot{p}_1 = \frac{\partial H}{\partial q_1} \Rightarrow \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial X} = X \Rightarrow X = \dot{x}$$

$$i = 2 \Rightarrow \quad \Rightarrow Y = \dot{y} \quad \Big\} \; (*)$$

نأخذ $\dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i}$

$$i = 1 \Rightarrow \dot{q}_1 = -\frac{\partial H}{\partial p_1} \Rightarrow \dot{X} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -y \Rightarrow \dot{X} + y = 0$$

$$i = 2 \Rightarrow \quad \Rightarrow \dot{Y} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -x \Rightarrow \dot{Y} + x = 0 \quad \Big\} \; (**)$$

(*) ، (**) هي معادلات هاملتون الأربعة المطلوبة.

٣- حتى تكون F تكاملاً أولياً لهذه المسألة يجب أن يتحقق الشرط $\{H, F\} = 0$

$$\{H, F\} = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial Y} - \frac{\partial H}{\partial X} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial Y} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$= y \cdot Y + x X - X x - Y \cdot y = 0$$

وبالتالي فعلاً F تكامل أولي

٤- نوجد التحويل القانوني المولد بالدالة $G = \frac{\sqrt{2}}{2}[x(X_1 - Y_1) + y(X_1 + Y_1)]$ وفق الدالة

$$X\,dx + Y\,dy + x_1\,dX_1 + y_1\,dY_1 = dG(x, y, X_1, Y_1) =$$

$$= \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial X_1}dX_1 + \frac{\partial G}{\partial Y_1}dY_1$$

... بالمطابقة

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(X_1 - Y_1)\,dx + \frac{\sqrt{2}}{2}(X_1 + Y_1)\,dy + \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)\,dX_1$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2}(y - x)\,dY_1$$

تابع ٣

بالمطابقة نجد أن

$$X = \frac{\sqrt{2}}{2}(X_1 - Y_1) \quad (1)$$

$$Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X_1 + Y_1) \quad (2)$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \quad (3)$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(y - x) \quad (4)$$

بجمع (3) و (4) نحصل على

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + y_1) \quad (5)$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - y_1) \quad (6)$$

هما التحويل القانوني المطلوب

x, y, X, Y

(1) و (2) و (5) و (6) هو التحويل القانوني المطلوب.

ملاحظة: أرجو التأكد من هذا الطلب من قبل الدكتور

السؤال الثالث:

[1] صح لأن $\{G+H^2, H\} = \{G, H\} + \{H, H\} = \{G, H\}$

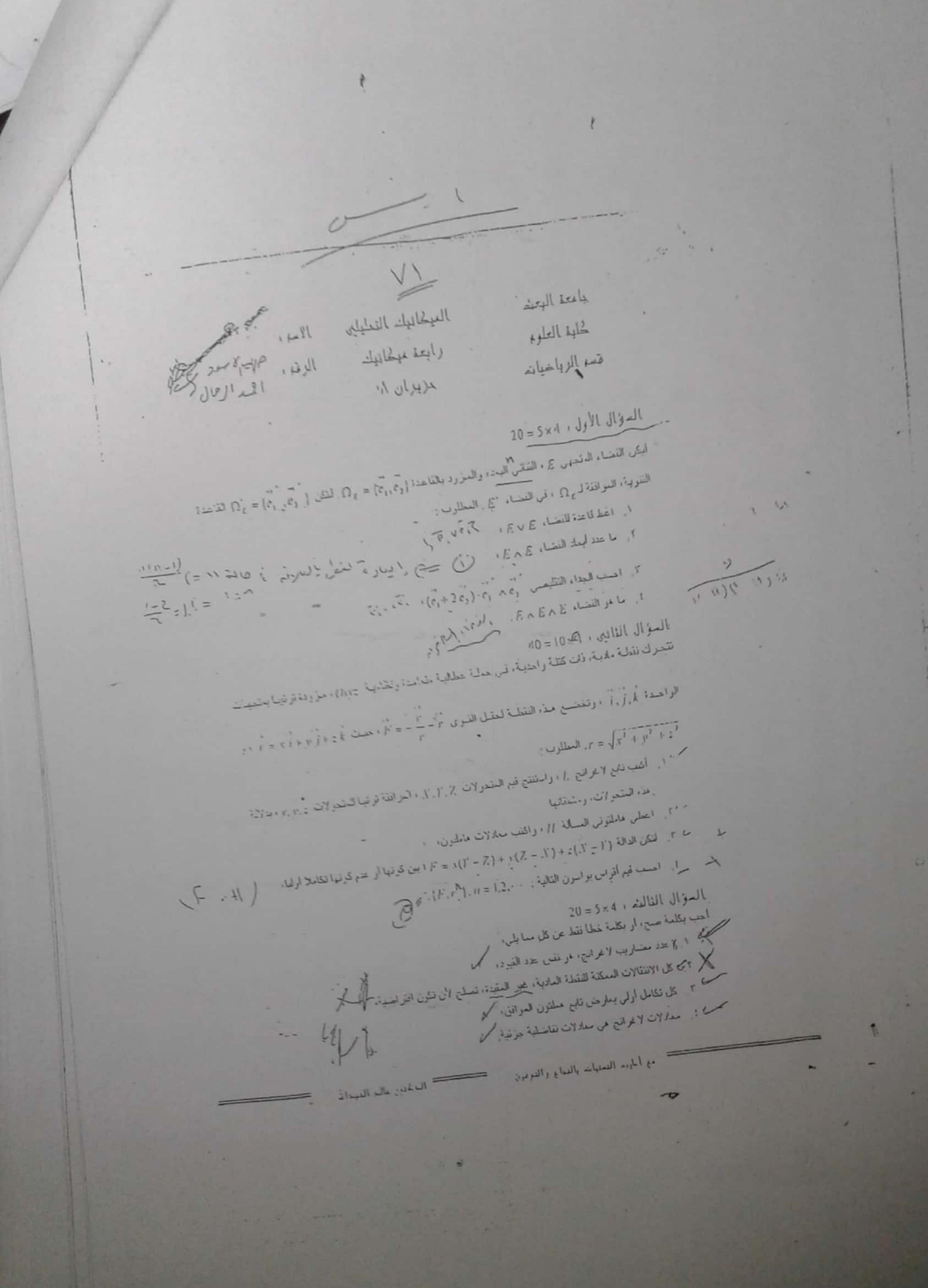
لأن كل دالة تؤدي نفسها

[2] خطأ

[3] صح لأن F تكامل أولي يعني الشرط التالي محقق $\{H, F\} = 0$

وتحقق هذا الشرط يعني أن الدالتين F, H متبادلتان

[4] خطأ لأنه لا يحافظ على تابع هاملتون.



جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الميكانيك التحليلي
رابعة ميكانيك
حزيران ٠١

الاسم:
الرقم:

السؤال الأول: $4 \times 5 = 20$

ليكن الفضاء الشعاعي E، الثنائي البعد، والمزود بالقاعدة $\Omega_E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. لتكن $\Omega^*_E = \{\vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}\}$ القاعدة الثنوية، الموافقة لـ Ω_E، في الفضاء E^*. المطلوب:

1. اعط قاعدة للفضاء $E \vee E$،
2. ما عدد أبعاد الفضاء $E \wedge E$،
3. احسب الجداء التنسوري $(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) \cdot \vec{e}^{\,1} \wedge \vec{e}_2$ [illegible]،
4. ما هو الفضاء $E \wedge E \wedge E$.

السؤال الثاني: $4 \times 10 = 40$

تتحرك نقطة مادية، ذات كتلة واحدية، في جملة عطالية متعامدة ومتجانسة $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$، مزودة ترتيبا بأشعة الواحدة $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$، وتخضع هذه النقطة لحقل القوى $\vec{F} = -\frac{k}{r^3}\vec{r}$ حيث $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$، و $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. المطلوب:

1. اكتب تابع لاغرانج L، واستنتج قيم المتحولات X, Y, Z، المرافقة ترتيبا للمتحولات x, y, z، بدلالة هذه المتحولات، ومشتقاتها.
2. اعط هاملتوني المسألة H، واكتب معادلات هاملتون،
3. لتكن الدالة $F = x(Y - Z) + y(Z - X) + z(X - Y)$، بين كونها أو عدم كونها تكاملا أوليا،
4. احسب قيم أقواس بواسون التالية: $\{F, r^n\}, n = 1, 2, \ldots$

السؤال الثالث: $4 \times 5 = 20$

اجب بكلمة صح، أو بكلمة خطأ فقط عن كل مما يلي:

1. عدد مضاريب لاغرانج، هو نفس عدد القيود،
2. كل الانتقالات الممكنة للنقطة المادية، غير المقيدة، تصلح لأن تكون افتراضية،
3. كل تكامل أولي يعارض تابع هاملتون الموافق،
4. معادلات لاغرانج هي معادلات تفاضلية جزئية.

مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق

المدرس: خالد الفيداق

{دورة حزيران ٠٨}

حل السؤال الأول:

[١] أولاً علينا معرفة عدد أبعاد قاعدة هذا الفضاء من الدستور $\frac{n(n+1)}{2}$

في ثنائي البعد ⇐ $3 = \frac{2(2+1)}{2}$.

⇐ $\{(e_1 \vee e_2), (e_1 \vee e_1), (e_2 \vee e_2)\}$ نصلح أنه تكون قاعدة لـ $E \vee E$

[٢] عدد أبعاد الفضاء $E \wedge E$ يعطى بالدستور $\frac{n(n-1)}{2}$.

لدينا $n=2$ ⇐ $1 = \frac{2(2-1)}{2}$

[٣] لحساب الجداء الداخلي: $(e_1 + 2e_2) \cdot e_1^* \wedge e_2^*$

علينا أولاً تحويل العبارة $e_1^* \wedge e_2^*$ اعتماداً على الدستور التالي:

$$e_1^* \wedge e_2^* = e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*$$

$$(e_1 + 2e_2) \cdot e_1^* \wedge e_2^* = (e_1 + 2e_2)(e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*)$$

$$= \underbrace{e_1 e_1^*}_{1} \otimes e_2^* - \underbrace{e_1 e_2^*}_{0} \otimes e_1^* + \underbrace{2e_2 e_1^*}_{0} \otimes e_2^* - \underbrace{2e_2 e_2^*}_{2} \otimes e_1^*$$

$$= e_2^* - 2e_1^*$$

[٤] الفضاء $E \wedge E \wedge E$ هو الفضاء الصفري $\Lambda^{n+k} E$ معدومة

ملاحظة من صهيب:

- بعد الفضاء $n = |E|$
- $= \quad m = |E \wedge E \wedge E|$

كما أنه $\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(m-1))}{m!} = \Lambda^m E$

إذاً: في حالة $n < m$ هو الفضاء الصفري

$n = m$ ، صفر وحيد

وفي حالتنا كان لدينا $n=2$ ، $m=3$ أي $n < m$ ⇐ هو الفضاء الصفري

وعدد أبعاده $\frac{n(n-1)(n-2)}{m!} = \frac{2(2-1)(2-2)}{3!} = 0$.

Soheb aswad

1

حل السؤال الثاني :

$$\vec{F} = -\frac{\vec{r}}{r} - \vec{r}$$

[1] إن متجه الموضع للنقطة المادية : $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

لحساب تابع لاغرانج يلزمنا :

• حساب الطاقة الحركية : $T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{v}}^2 \quad ; \quad m = 1$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

• حساب الطاقة الكامنة : نبحث عن دالة V بحيث :

$$\overrightarrow{grad}\, V = -\vec{F} \Rightarrow \frac{d\vec{V}}{d\vec{r}} = -\vec{F}$$

نضرب الطرفين بـ $d\vec{r}$ $\Leftarrow$

$$d\vec{V} = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$
$$= \left(\frac{\vec{r}}{r} + \vec{r}\right) d\vec{r}$$
$$= \frac{\vec{r}}{r} d\vec{r} + \vec{r}\, d\vec{r}$$
$$= \frac{\vec{r}}{r} d\vec{r}\,(1 + r)$$

$$\Rightarrow d\vec{V} = (1 + r)\, dr \Rightarrow V = \frac{1}{2}(1 + r)^2$$

• تابع لاغرانج : $L = T - V$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}(1 + r)^2 \quad ; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

• تحويل لوجندر :

من العلاقة $q_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i}$ $\Leftarrow$; $\begin{cases} q_1 = X, & \dot{p}_1 = \dot{x} \\ q_2 = Y, & \dot{p}_2 = \dot{y} \\ q_3 = Z, & \dot{p}_3 = \dot{z} \end{cases}$

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} \\ Y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} \\ Z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \dot{z} \end{aligned} \right\}$$

[2] هاملتونين المسألة : $H = \left(\sum_{i=1}^{3} q_i \dot{p}_i - L\right) \circ \mathcal{L}(p, q)$

$$= \left[X \cdot \dot{x} + Y \cdot \dot{y} + Z \cdot \dot{z} - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(1 + r)^2\right] \circ \mathcal{L}(x, y, z, X, Y, Z)$$

$$= X \cdot X + Y \cdot Y + Z \cdot Z - \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{2}(1 + r)^2$$

$$= (X^2 + Y^2 + Z^2) - \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{2}(1 + r)^2$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{2}(1 + r)^2$$

٥ معادلات هاملتون : من العلاقتين

$$\dot{q}_k = \frac{-\partial H}{\partial p_k} \quad , \quad \dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad (k = x, y, z)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial X} = X \Rightarrow \dot{x} - X = 0 \quad \ldots (1)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial Y} = Y \Rightarrow \dot{y} - Y = 0 \quad \ldots (2)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial Z} = Z \Rightarrow \dot{z} - Z = 0 \quad \ldots (3)$$

$$\dot{X} = \frac{-\partial H}{\partial x} = x\left(\frac{1+r}{r}\right) \Rightarrow \dot{X} - x\left(\frac{1+r}{r}\right) = 0 \quad \ldots (4)$$

$$\dot{Y} = \frac{-\partial H}{\partial y} = y\left(\frac{1+r}{r}\right) \Rightarrow \dot{Y} - y\left(\frac{1+r}{r}\right) = 0 \quad \ldots (5)$$

$$\dot{Z} = \frac{-\partial H}{\partial z} = z\left(\frac{1+r}{r}\right) \Rightarrow \dot{Z} - z\left(\frac{1+r}{r}\right) = 0 \quad \ldots (6)$$

[٢] حتى تكون الدالة F تكامل أولي يجب تحقق الشرط :

$$\Leftarrow \quad \{F, H\} = 0$$

$$\{H, F\} = \frac{\partial H}{\partial X}\cdot\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial Y}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial Y} + \frac{\partial H}{\partial Z}\cdot\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial z}\cdot\frac{\partial F}{\partial Z}$$

$$= X(Y - Z) - \left(-x\left(\frac{1+r}{r}\right)\right)(-y+z)$$
$$+ Y(Z - X) - \left(-y\left(\frac{1+r}{r}\right)\right)(x - z)$$
$$+ Z(X - Y) - \left(-z\left(\frac{1+r}{r}\right)\right)(-x+y)$$

$$= XY - XZ + YZ - XY + XZ - YZ$$
$$- \left(\frac{1+r}{r}\right)\left[-xy + xz + xy - yz - xz + yz\right]$$

$$= 0 - 0 + 0 - \left(\frac{1+r}{r}\right)\left[0 + \ldots + 0\right] = 0$$

∴ الشرط محقق .. $\Leftarrow$ F تكامل أولي

next
التالي ← انتراس براكون
←

soheby7@yahoo.com

1

٤ حل: أقواس براسون $\{F, r^n\}$; $n=1,2,\dots$

○ عندما $n=1$ يكون: $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ⇐

$$\{F,r\} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial r}{\partial X} - \frac{\partial F}{\partial X}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial r}{\partial Y} - \frac{\partial F}{\partial Y}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial r}{\partial Z} - \frac{\partial F}{\partial Z}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}$$

$$= (y+z)(0) - (-y+z)\left(\frac{x}{r}\right) + (z-x)(0) - (x-z)\left(\frac{y}{r}\right) + (x-y)(0) - (-x+y)\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$= 0+0+\frac{1}{r}\left[xy - xz - xy + yz + xz - yz\right] = 0$$

⇐ عند $n=1$ يكون $\{F,r\}=0$

○ عندما $n=2$ يكون: $r^2 = x^2+y^2+z^2$ ⇐

$$\{F,r^2\} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial r^2}{\partial X} - \frac{\partial F}{\partial X}\cdot\frac{\partial r^2}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial r^2}{\partial Y} - \frac{\partial F}{\partial Y}\cdot\frac{\partial r^2}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial r^2}{\partial Z} - \frac{\partial F}{\partial Z}\cdot\frac{\partial r^2}{\partial z}$$

$$= (y-z)(0) - (-y+z)(2x) + (z-x)(0) - (x-z)(2y) + (x-y)(0) - (-x+y)(2z)$$

$$= +2xy - 2xz - 2xy + 2yz + 2xz - 2yz$$

$$= 0$$

باستمرار نجد أن: أقواس براسون $\{F, r^n\} = 0 \quad \forall n$

١٥ السؤال الثاني

١- صح

٢- خطأ

٣- صح

٤- صح

مشابهة كل أجزاء

حبيب الأسود - أحمد الرحال

جامعة البعث — الميكانيك التحليلي — الاسم:

كلية العلوم — رابعة ميكانيك — الرقم:

قسم الرياضيات — كانون 08

السؤال الأول: 20 = 5×4

ليكن الفضاء المتجهي E، المزود بالقاعدة $\Omega_E = (e_1, e_2, e_3, e_4)$، ولتكن قاعدتها الثنوية $\Omega_E^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*)$، في الفضاء E^*. ليكن أيضاً الموتر (التنسور) $\mu = e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*$.

المطلوب:

1. اعط قاعدة للفضاء $E \wedge E \wedge E$.
2. احسب $\mu(e_1 - e_2, e_3, e_1)$.
3. ما عدد أبعاد الفضاء $E \vee E$.
4. احسب $(e_1^* \vee e_2^*)(e_3, e_1)$.

السؤال الثاني: 40 = 10×4

تتحرك نقطة مادية، ذات كتلة واحدية، في جملة ديكارتية متعامدة ونظامية $Oxyz$، مزودة ترتيباً بتجهيات الواحدة $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$، وتخضع هذه النقطة لحقل القوى $\vec{F} = -\frac{\vec{R}}{R^3}$، حيث $\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j}$، و $R = \sqrt{x^2 + y^2}$.

المطلوب:

1. اكتب تابع لاغرانج L، واعط المعادلات التي تعرف المتحولات p_x, p_y, p_z المرافقة ترتيباً للمتحولات x, y, z.
2. اعط هاملتوني المسألة H، واكتب معادلات هاملتون.
3. لتكن الدالتين $H_1 = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{R}$، و $H_2 = \frac{1}{2}\dot{z}^2 - \frac{1}{2}z^2$، اختر احدهما، وبرهن أنها تكامل أولي، ثم استنتج أن الأخرى تكامل أولي.
4. بين تعارض أو عدم تعارض التكاملات الأولية H_1, H_2.

السؤال الثالث: 20 = 5×4

أجب بكلمة صح، أو بكلمة خطأ فقط عن كل مما يلي:

1. التحويلات القانونية، تحافظ على تابع هاملتون.
2. يكفي قانون نيوتن وحده لحل جميع مسائل الميكانيك.
3. الانتقال الافتراضي ملائم للقيود، دائماً.
4. كون إحدى الدالتين المتعارضتين تكاملاً أولياً، لا يعني بالضرورة أن الأخرى تكامل أولي.

مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق

الدكتور [illegible] العبدالله

{دورة كانون ٢٠٠٨}

حل السؤال الأول :

[١] لنوجد أولاً عدد أبعاد قاعدة هذا الفضاء ويعطى بالدستور : $\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$

لدينا $n = 4$ ⇐ $4 = \frac{4(3)(2)}{3 \times 2 \times 1}$

فتكون القاعدة :

$$\{(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3), (e_1 \wedge e_2 \wedge e_4), (e_1 \wedge e_3 \wedge e_4), (e_2 \wedge e_3 \wedge e_4)\}$$

[٢] قبل الحساب علينا تحويل M من جداء خارجي إلى ⊗ وذلك اعتماداً على الدستور :

$$M_1 \wedge M_2 = M_1 \otimes M_2 - M_2 \otimes M_1$$

1 2 3

إذا بدلنا مواضع الجميع ⇐ (−)

إذا بدلنا موقعين ⇐ +

[illegible]

$$M = e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* = \underbrace{e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_3^*}_{①} + \underbrace{e_2^* \otimes e_3^* \otimes e_1^*}_{②} + \underbrace{e_3^* \otimes e_1^* \otimes e_2^*}_{③} - e_1^* \otimes e_3^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^* \otimes e_3^* - e_3^* \otimes e_2^* \otimes e_1^*$$

ومنه نجد ③

الآن :

$$M(\underbrace{e_1 - e_2}_{a}, \underbrace{e_3}_{b}, \underbrace{e_2}_{c}) = e_1^*(e_1 - e_2) \otimes e_2^*(e_3) \otimes e_3^*(e_2) \longrightarrow ①$$

$$+ e_2^*(e_1 - e_2) \otimes e_3^*(e_3) \otimes e_1^*(e_2) \longrightarrow ②$$

$$+ e_3^*(e_1 - e_2) \otimes e_1^*(e_3) \otimes e_2^*(e_2) \longrightarrow ③$$

$$- e_1^*(e_1 - e_2) \otimes e_3^*(e_3) \otimes e_2^*(e_2) \longrightarrow ④$$

$$- e_2^*(e_1 - e_2) \otimes e_1^*(e_3) \otimes e_3^*(e_2) \longrightarrow ⑤$$

$$- e_3^*(e_1 - e_2) \otimes e_2^*(e_3) \otimes e_1^*(e_2)$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + (-1)(1)(1) = \boxed{-1}$$

[٣] عدد أبعاد الفضاء $E^{\vee}$ يعطى بالدستور : $\frac{n(n+1)}{2!}$

نعوض $n = 4$ فيكون $\frac{4(4+1)}{2 \times 1}$

⇐ عدد الأبعاد = ١٠

[٤] بنفس طريقة الطلب ② نحول $e_1 \vee e_2$ حسب الدستور :

$$M_1 \vee M_2 = M_1 \otimes M_2 + M_2 \otimes M_1$$

$$\Rightarrow e_1 \vee e_2 = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$$

$$e_1 \vee e_2 (e_2^*, e_1^*) = (e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1)(e_2^*, e_1^*)$$

$$= e_1 e_2^* \otimes e_2 e_1^* + e_2 e_2^* \otimes e_1 e_1^*$$

$$= 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = \boxed{1}$$

حل السؤال الثاني :

[أ] إن متجه الموضع للنقطة المادية هو :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{R} + z\vec{k}$$

$$\Rightarrow d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k} = d\vec{R} + dz\,\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k}$$

لحساب تابع لاغرانج علينا حساب كل من الطاقة الحركية والطاقة الكامنة :

← الطاقة الحركية : تعطى بالدستور :

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$$

$$= \frac{1}{2}(1)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \Leftarrow$$

← الطاقة الكامنة : من العلاقة :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, V$$

نضرب الطرفين بـ $d\vec{r}$:

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = -\overrightarrow{grad}\, V \cdot d\vec{r}$$

الآن نعوض قيمة $\vec{F}$:

$$\Rightarrow \vec{F}\cdot d\vec{r} = -dV$$

$$\Rightarrow -dV = \left[\frac{-\vec{R}}{R^3} + z\vec{k}\right]\cdot\left[d\vec{R} + dz\,\vec{k}\right]$$

$$= \frac{-\vec{R}\cdot d\vec{R}}{R^3} + z\,dz = \frac{-1}{R^2}\frac{\vec{R}}{R}d\vec{R} + z\,dz$$

$$= \frac{-dR}{R^2} + z\,dz$$

$$\Rightarrow -dV = d\left(\frac{1}{R}\right) + z\,dz = d\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2}z^2\right)$$

بالمكاملة نجد :

$$V = -\frac{1}{R} - \frac{1}{2}z^2$$

• دالة لاغرانج :

$$L = T - V$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \left(\frac{-1}{R} - \frac{1}{2}z^2\right)$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{R} + \frac{1}{2}z^2$$

• تحويل لوجندر : له الشكل :

$$q_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_n}$$

حيث

$$\left.\begin{aligned} \dot{p}_1 &= \dot{x}, & q_1 &= X \\ \dot{p}_2 &= \dot{y}, & q_2 &= Y \\ \dot{p}_3 &= \dot{z}, & q_3 &= Z \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} \\ Y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} X &= \dot{x} \\ Y &= \dot{y} \\ Z &= \dot{z} \end{aligned}\right\}$$

[٢] هاملتونيان المسألة يعطى بالدستور

$$H=\sum_{i=1}^{3}(q_i\dot{p}_i - L) \quad \dot{L}(p,q)$$

$$H=\sum_{i=1}^{3}(q_i\dot{p}_i - L) \quad L(x,y,z,X,Y,Z)$$

$$=\left(X\cdot\dot{x}+Y\cdot\dot{y}+Z\cdot\dot{z}-L\right) \quad L(x,y,z,X,Y,Z)$$

$$=X\cdot X+Y\cdot Y+ZZ-\left[\frac{1}{2}(X^2+Y^2+Z^2)+\frac{1}{R}+\frac{Z^2}{2}\right]$$

$$=X^2+Y^2+Z^2-\frac{1}{2}(X^2+Y^2+Z^2)-\frac{1}{R}-\frac{1}{2}Z^2$$

$$\Rightarrow H=\frac{1}{2}(X^2+Y^2+Z^2)-\frac{1}{R}-\frac{1}{2}Z^2$$

معادلات هاملتون لها الشكل:

$$\dot{q}_k=\frac{-\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k=\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

حيث $k=1,2,3$

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial X}=X \Rightarrow \dot{x}=X \quad \text{---(1)}$$

$$\dot{y}=\frac{\partial H}{\partial Y}=Y \Rightarrow \dot{y}=Y \quad \text{---(2)}$$

$$\dot{z}=\frac{\partial H}{\partial Z}=Z \Rightarrow \dot{z}=Z \quad \text{---(3)}$$

$$\dot{X}=\frac{-\partial H}{\partial x}=\frac{-x}{R^3} \Rightarrow \dot{X}=\frac{-x}{R^3} \quad \text{---(4)}$$

$$\dot{Y}=\frac{-\partial H}{\partial y}=\frac{-y}{R^3} \Rightarrow \dot{Y}=\frac{-y}{R^3} \quad \text{---(5)}$$

$$\dot{Z}=\frac{-\partial H}{\partial z}=\frac{+z}{R^3} \Rightarrow \dot{Z}=\frac{+z}{R^3} \quad \text{---(6)}$$

[٢] لنثبت أنه: $H_1=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{1}{R}$ هو تكامل أولي:

وحتى يكون H_1 هو تكامل أولي يجب أن يحقق الشرط $\{H_1,H\}=0$

$$\{H,H_1\}=\frac{\partial H}{\partial x}\cdot\frac{\partial H_1}{\partial X}-\frac{\partial H}{\partial X}\frac{\partial H_1}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}\cdot\frac{\partial H_1}{\partial Y}-\frac{\partial H}{\partial Y}\cdot\frac{\partial H_1}{\partial y}$$

$$+\frac{\partial H}{\partial z}\cdot\frac{\partial H_1}{\partial Z}-\frac{\partial H}{\partial Z}\cdot\frac{\partial H_1}{\partial z}$$

$$=\frac{x}{R^3}\cdot X-X\cdot\frac{x}{R^3}+\frac{y}{R^3}\cdot Y-Y\cdot\frac{y}{R^3}+0(Z)-(0)(-z)$$

$$=0$$

إذاً H_1 هو دالة تكاملية أولية.

ب

(ب) بملاحظة أن:

$$H - H_1 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{1}{R} - \frac{1}{2}z^2 - \left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{R}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{R} - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{R}$$

$$= \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}z^2 = H_2$$

وبما أن كلاً من H ، H_1 هو تكاملاً أولياً ولأن الفرق بين تكاملين أوليين هو تكامل أولي
إذاً نستنتج أن H_2 هو تكامل أولي ونقول:

$$\{H_2, H\} = \{H - H_1, H\} = \{H, H\} - \{H_1, H\} = 0 - 0 = 0$$

$\Leftarrow H_2$ تكامل أولي ($=0$ كون H_1 تكامل أولي)

[٤] حتى يكون التكاملان الأوليان H_1 ، H_2 متعارضان يجب أن يتحقق الشرط:

$$\{H_1, H_2\} = 0 \Rightarrow$$

$$\{H_1, H_2\} = \frac{\partial H_1}{\partial x}\frac{\partial H_2}{\partial X} - \frac{\partial H_1}{\partial X}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial y}\frac{\partial H_2}{\partial Y} - \frac{\partial H_1}{\partial Y}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial y}$$

$$+ \frac{\partial H_1}{\partial z}\frac{\partial H_2}{\partial Z} - \frac{\partial H_1}{\partial Z}\frac{\partial H_2}{\partial z}$$

$$= \frac{x}{R^3}(0) - X(0) + \frac{y}{R^3}(0) - Y(0) + (0)Z - (0)(Z) = 0$$

$$\Rightarrow \{H_1, H_2\} = 0$$

$\Leftarrow H_1$ و H_2 تكاملان متعارضان .. ✓

حل السؤال الثالث:

١.. صح
٢- خطأ
٣.. خطأ
٤. صح

تمت بعونه
[توقيع]
صفحة الإعداد
صفحة الإيام .. يا ودياله

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

ميكانيك تحليلي
رابعة رياضيات - ميكانيك
كانون 2009

الاسم:
الرقم:

السؤال الأول : $4 \times 5 = 20$

ليكن E فضاءً متجهياً، عدد أبعاده 3، ويملك القاعدة $\Omega = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$، و E^* فضاءه الثنوي، ولتكن $\Omega^* = \{\overrightarrow{e_1}^*, \overrightarrow{e_2}^*, \overrightarrow{e_3}^*\}$ القاعدة الثنوية للقاعدة Ω. لنضع $A = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$، و $B = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$. المطلوب :

1. اعط قاعدة للفضاء $E \wedge E$،
2. احسب $A \wedge B$، بدلالة القاعدة السابقة،
3. احسب $A \wedge B \wedge \overrightarrow{e_1}$،
4. احسب الجداء التقليصي $\overrightarrow{e_1}^* \cdot (A \wedge B)$.

السؤال الثاني : $4 \times 10 = 40$

في الجملة الإحداثية $Oxyz$، تتحرك نقطة مادية $P(x, y, z)$، كتلتها m، تحت تأثير القوة $\vec{F} = (a - r)\frac{\vec{r}}{r}$، $a \in \mathcal{R}^{(+)}$ حيث $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$، والمطلوب :

1. اعط تابع الكمون V، وتابع الطاقة الحركية T، ثم تابع لاغرانج L،
2. لنرمز لمرافقات x, y, z بالرموز X, Y, Z، على الترتيب، اوجد تحويل لوجندر، واعط تابع هملتون H،
3. لنضع $C_x = yZ - zY$. برهن أن C_x تكامل أولي بالنسبة لتابع هملتون H،
4. لنضع $C_y = zX - xZ$، $C_z = xY - yX$. احسب أقواس بواسون $\{C_y, C_z\}$، وقارن مع C_x.

السؤال الثالث : $4 \times 5 = 20$

اجب بصح أو بخطأ (فقط) عما يلي :

1. مبدأ مثالية القيود يستنتج من قانون نيوتن،
2. تكون ردود الأفعال المطبقة على نقطة مادية معدومة، عند عدم وجود قيود،
3. عدد معادلات هملتون، لجملة هلونومية، هو نفس عدد معادلات لاغرانج،
4. H^2 ليس تكاملاً أولياً في مسألة تابع هملتون فيها هو H.

د. خالد العبدالله

مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق

{دورة كانون ٢٠١٠}

حل السؤال الأول :

[1] علينا أولاً معرفة عدد أبعاد الفضاء $\mathcal{E} \wedge \mathcal{E}$ = $\frac{n(n-1)}{2!}$

$n = 3 \Leftarrow 3 = \frac{3(2)}{2}$

$\Leftarrow \{(e_1 \wedge e_2), (e_1 \wedge e_3), (e_2 \wedge e_3)\}$ نستطيع أن نكون قاعدة ..

[2]

$\circ A = e_1 + e_2$
$\circ B = e_1 - e_2$
$\Rightarrow A \wedge B = (e_1 + e_2) \wedge (e_1 - e_2)$

$= \underbrace{e_1 \wedge e_1}_{0} - e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_1 - \underbrace{e_2 \wedge e_2}_{0}$

لكن: $e_1 \wedge e_1 = e_2 \wedge e_2 = 0$

$e_1 \wedge e_2 = -e_2 \wedge e_1$

$A \wedge B = -2 e_1 \wedge e_2 \Leftarrow$

[3]

$\circ A \wedge B \wedge \vec{e}_1 = -2\, e_1 \wedge e_2 \wedge e_1$

$= -2 [e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_1$

$- e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 \}$

$= -2(0) = 0$

∘ ملاحظة بين هامين: عندما تكون التبديلة زوجية تكون (+1) ← موجب
، ، فردية ، (-1) ← سالب

[4]

$\circ (A \wedge B) \cdot \vec{e}_1^* = (-2 e_1 \wedge e_2) \cdot e_1^*$

أولاً علينا تحويل الجداء الخارجي لـ تنسوري ⊗

$-2 e_1 \wedge e_2 = -2 (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1).$

$\Rightarrow (A \wedge B) \cdot e_1^* = (-2 e_1 \otimes e_2 + 2 e_2 \otimes e_1)(e_1^*)$

$= 2 e_1 \otimes e_2 \cdot \underbrace{e_1^*}_{0} + 2 e_2 \otimes \underbrace{e_1 \cdot e_1^*}_{1} = -2 e_2$

∘ ملاحظة هامة جداً جداً جداً
يوجد فرق شاسع بين التقليص من اليمين ومن اليسار (الجواب مختلف)

حل السؤال الثاني:

$$\vec{F} = (a - r)\frac{\vec{r}}{r}$$

[1] بأن شعاع موضع النقطة المادية P :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

• **تابع الطاقة الحركية T :** $T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

• **تابع الكمون V :** نبحث عن الدالة V بحيث:

$$\overrightarrow{grad}\, V = -\vec{F} \Rightarrow \frac{dV}{d\vec{r}} = -\vec{F}$$

$$\Rightarrow dV = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -(a - r)\frac{\vec{r}}{r} d\vec{r}$$

$$\Rightarrow dV = -(a - r)\, dr$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2}(a - r)^{-2} \quad ; a \in R^{+}$$

• **تابع لاغرانج:** $L = T - V \Leftarrow$

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}(a - r)^2$$

[2] **تحويل لوجندر:**

من $\dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i}$ حيث $p_1 = \dot{x}$, $p_2 = \dot{y}$, $p_3 = \dot{z}$ & $q_1 = X$, $q_2 = Y$, $q_3 = Z$ الإحداثيات.

بالتعويض:

$$X = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{X}{m}$$

$$Y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \Rightarrow \dot{y} = \frac{Y}{m}$$

$$Z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{Z}{m}$$

• **ملاحظة:** من الضروري جداً في تحويل لوجندر وضع المشتق بطرف والباقي بطرف...

• **تابع هاملتون:**

$$H = \left(\sum_{i}^{3} q_i \dot{p}_i - L\right) \circ d(p, q)$$

$$\Rightarrow H = \left[(X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z} - \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(a - r^2)\right] \circ d(x, y, z, X, Y, Z)$$

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

ميكانيك تحليلي
رابعة رياضيات - ميكانيك
كانون ٢٠١٥

الاسم :
الرقم :

السؤال الأول : $5 \times 7 = 35$

ليكن E , F فضائيين متجهيين، يملكان القاعدتين $f = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \bar{f}_4\}$, $e = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$، ولتكن أيضاً $f^* = \{\bar{f}_1^*, \bar{f}_2^*, \bar{f}_3^*, \bar{f}_4^*\}$، و $e^* = \{\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*\}$ القاعدتين الثنويتين، في الفضائين E^*, F^*.

لنضع : $\alpha = 7\bar{e}_1 - 5\bar{e}_2$ ، $\beta = 2\bar{e}_1^* + 3\bar{e}_2^*$ المطلوب :

١. اعط قاعدة للفضاء $F \wedge F \wedge F$،
٢. اعط قاعدة للفضاء $F^* \otimes E$،
٣. كم عدد أبعاد الفضاء $F \vee F$،
٤. احسب الجداء التقليصي $\alpha \cdot \beta$،
٥. احسب $\alpha \otimes \alpha$،
٦. حدد الفضاء $F \wedge F \wedge F \wedge F \wedge F$،
٧. هل العبارة $\beta . \beta$ معرفة.

السؤال الثاني : $10 \times 3 = 30$

في جملة إحداثية عطالية متعامدة ونظامية $Oxyz$، تتحرك نقطة مادية $P(x, y, z)$، كتلتها واحدية، تحت تأثير القوة $\bar{F} = x\bar{i} + 2y\bar{j} + 3z\bar{k}$، وتخضع للقيدين المثاليين: $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$, $x = 0$. المطلوب :

١. حدد عدد درجات الحرية، ثمّ أوجد معادلات الحركة باستخدام طريقة مضاريب لاغرانج.
٢. اعط تابع كمون V، وتابع الطاقة الحركية T، ثمّ تابع لاغرانج L، بدلالة المتحول المعمم φ، ومشتقاته بالنسبة للزمن، حيث $2y = \cos\varphi,\ 3z = \sin\varphi$
٣. لنرمز لمرافق المتحول φ بالرمزين ρ ، أوجد تحويل لوجندر، واكتب تابع هملتون.

السؤال الثالث : $5 \times 7 = 35$

أجب بصح أو بخطأ **(فقط)** عما يلي :

١. القيد المثالي قد يقدم رد فعل،
٢. التكامل الأولي هو دالة ثابتة على الفضاء الطوري،
٣. تابع هملتون يساوي تابع لاغرانج،
٤. الجسم الصلب هو مجموعة من النقط المادية الطليقة،
٥. تملك النقطة المادية الطلقة ستة درجات حرية،
٦. المعادلة الأساسية في التحريك خالية من ردود الأفعال،
٧. إذا كانت F تكاملاً أولياً، وكانت $F+G$ تكاملاً أولياً، تكون G تكاملاً أولياً.

د.خالد العبدالله ——— مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق